

第 170 講 収束・発散・振動

学習目標

この講では、数列がどのような振る舞いをするかを分類できるようになることを目標とする。具体的には、数列が有限の実数へ近づく場合を収束、そうでない場合を発散として判断し、発散の中でも正の無限大、負の無限大、振動を区別できるようになる。また、初めの数項だけではなく、十分先の項全体を見る必要があることを理解する。

数列の行き先を見る

本講で扱う数列は、番号 n が正整数であり、各項が実数である無限数列とする。数列では、項が並んだ一部分だけではなく、項番号 n が大きくなったときの全体の様子を見ることが重要である。例えば、最初の数項が大きくなっていても、その後に一定の値へ近づくことはある。逆に、最初の数項が小さくても、後からどんどん大きくなることもある。したがって、数列の振る舞いを調べるときは「十分先の項がどこへ向かうか」を考える。

収束と発散

数列 $\{a_n\}$ が有限の実数 α に近づくとき、数列は収束するといい、次のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

このとき、 α は実数の極限值である。有限の実数へ近づかない数列は発散するといい、発散には正の無限大へ進む場合、負の無限大へ進む場合、どちらでもない場合がある。

正の無限大と負の無限大

数列 $\{a_n\}$ が正の無限大へ発散するとは、任意の正の実数 M に対して、 M に応じてある正整数 N を選ぶことができ、 $n \geq N$ のすべてで $a_n > M$ が成り立つことである。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

と表す。負の無限大へ発散する場合も同様であり、任意の正の実数 M に対して、 M に応じてある正整数 N を選ぶことができ、 $n \geq N$ のすべてで $a_n < -M$ が成り立つことである。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

と表す。ここで重要なのは、どんな正の実数 M を選んでも、それに応じて十分先の番号 N を選べることである。 $+\infty$ や $-\infty$ は実数の極限值ではなく、数列が無限に大きい方向または無限に小さい方向へ発散することを示す記号である。したがって、 $n = \infty$ のように番号へ数値を代入する意味ではなく、十分大きな番号以降の項の振る舞いを表している。

分類の判断軸

数列の振る舞いは次のように分類する。

本講では、有限の実数へ収束しない数列を発散する数列と呼び、その中で正の無限大や負の無限大へ発散する場合と、どちらにも当てはまらない振動を区別する。振動も有限の実数へ収束しない発散の一種である。

振る舞い	判断
ある有限の実数へ近づく	収束
正の方向へ限りなく大きくなる	正の無限大への発散
負の方向へ限りなく小さくなる	負の無限大への発散
上のどれにも当てはまらない	振動

ただし、符号が交互に変わるだけで振動とは限らない。例えば、 $(-1)^n \frac{1}{n}$ は符号が交互でも、項の大きさが 0 に近づくため収束する。

また、単調に増加する数列でも、必ず正の無限大へ発散するとは限らない。

注意

∞ は実数ではなく、数列の極限值として扱う実数ではない。

「値が大きくなる」という感覚だけで判断せず、どんな基準 M に対しても、それ以降のすべての項が条件を満たすかを確認する必要がある。

例題 1

数列 $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ の極限を調べ、収束することを説明せよ。

例題 1 の解答・解説

n が大きくなると $\frac{1}{n}$ は 0 に近づく。

したがって、 a_n は 2 に近づく数列である。

実際に差を見ると、 $a_n - 2 = \frac{1}{n}$ となり、 n を大きくするとこの差は限りなく 0 に近づく。

よって、数列 a_n は有限の実数 2 へ近づくため収束し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ となる。

例題 2

次の 2 つの数列について、発散の種類を判断し、その理由を説明せよ。

(1) $a_n = n$

(2) $b_n = -n$

例題 2 の解答・解説

(1) $a_n = n$ について考える。

任意の $M > 0$ を取る。 $N > M$ となるように N を選ぶと、 $n \geq N$ のとき

$$a_n = n \geq N > M$$

となる。

したがって、十分先のすべての項がどんな基準 M よりも大きくなるため、 a_n は正の無限大へ発散する。

(2) $b_n = -n$ について考える。

任意の $M > 0$ を取る。 $N > M$ となるように N を選ぶと、 $n \geq N$ のとき

$$b_n = -n \leq -N < -M$$

となる。

したがって、十分先のすべての項がどんな負の基準よりも小さくなるため、 b_n は負の無限大へ発散する。

どちらの場合も、単に大きい値や小さい値が現れることなく、十分先の全項で条件が成立することが判断の根拠となる。

例題 3

数列 $a_n = (-1)^n$ の振る舞いを調べ、収束、正の無限大への発散、負の無限大への発散のどれにも当てはまらないことを説明せよ。

例題 3 の解答・解説

最初の 6 項を書くと、 $-1, 1, -1, 1, -1, 1$ となる。

奇数番目の項は -1 、偶数番目の項は 1 であり、項は 2 つの値を繰り返している。

まず、正の無限大や負の無限大へ進むことはない。なぜなら、項の値は常に -1 または 1 であり、限りなく大きくなったり小さくなったりしないからである。

次に、有限の実数 α へ近づくかを考える。

$\alpha \geq 0$ の場合、奇数番目の項 -1 との距離は

$$|-1 - \alpha| = 1 + \alpha \geq 1$$

であり、 0 に近づかない。

また、 $\alpha < 0$ の場合、偶数番目の項 1 との距離は $|1 - \alpha| = 1 - \alpha > 1$ であり、同じく 0 に近づかない。

任意の正整数 N より後にも奇数番号と偶数番号の項が存在する。したがって、任意の実数 α に対して、どれだけ先へ進んでも α からの距離が 1 以上になる項を見つけられるため、十分先の全項が α のまわりの幅 $\frac{1}{2}$ 以内にとどまることはない。また、項の値は常に -1 または 1 であるため、 $M = 2$ とすれば正の無限大や負の無限大の条件も満たさない。

したがって、どの有限の実数にも近づかず、正負どちらの無限大へも進まないため、この数列は振動する。

ここでいう振動とは、有限の実数へ収束せず、さらに正の無限大にも負の無限大にも発散しない数列の振る舞いを指す。

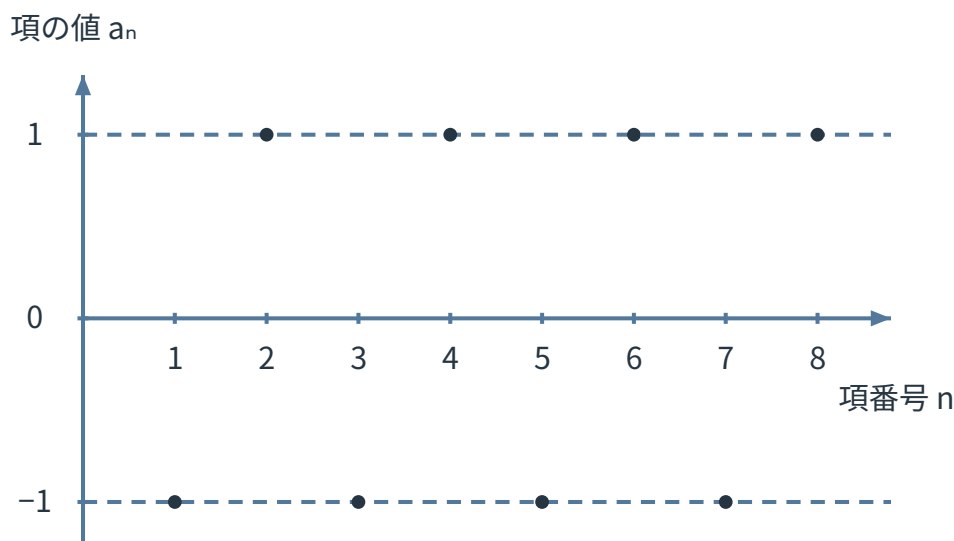


図1 数列 $a_n = (-1)^n$ の初めの8点を示した。破線は高さ1と-1の補助線であり、点を順につなぐ線ではない。奇数項は-1、偶数項は1で、0となる項はない。振動は有限8項の図だけで判断せず、すべての正整数 n に対する本文の規則から説明する。縦横の縮尺は異なる。

演習問題

練習問題 1

数列 $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数列の分類を答えよ。
- (2) その理由を説明せよ。

練習問題 2

数列 $a_n = n + 5$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数列の分類を答えよ。
- (2) 任意の $M > 0$ に対して、十分先の項がすべて M より大きくなることを説明せよ。

練習問題 3

数列 $a_n = -2n + 1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数列の分類を答えよ。
- (2) 任意の $M > 0$ に対して、十分先の項がすべて $-M$ より小さくなることを説明せよ。

練習問題 4

数列 $a_n = (-1)^{n+1}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数列の分類を答えよ。
- (2) 有限の実数へ近づかず、正負どちらの無限大にも発散しない理由を説明せよ。

練習問題 5

数列 $a_n = (-1)^n n$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数列の分類を答えよ。
- (2) 絶対値が大きくなるにもかかわらず、正の無限大や負の無限大へ発散せず、有限の実数へも収束しない理由を説明せよ。

練習問題 6

数列 $a_n = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数列の分類を答えよ。
- (2) 極限を求め、その理由を説明せよ。

練習問題 7

数列 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数列の分類を答えよ。
- (2) 符号が交互に変化するにもかかわらず振動ではない理由を説明せよ。

練習問題 8

「単調に増加する数列はすべて正の無限大へ発散する」という主張について考える。

数列 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ を用いて、次の問いに答えよ。

- (1) a_n が単調に増加することを説明せよ。
- (2) この数列が正の無限大へ発散せず、有限の極限を持つことを説明せよ。

練習問題 1 の解答・解説

- (1) 有限収束である。
- (2) a_n と 3 の差を見ると、 $a_n - 3 = -\frac{1}{n}$ である。
 n が大きくなると $\frac{1}{n}$ は 0 に近づくため、 a_n は 3 に近づく。
したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ となり、有限収束である。

練習問題 2 の解答・解説

(1) 正の無限大への発散である。

(2) 任意の $M > 0$ を取る。

$N > M - 5$ となるような正整数 N を選ぶと、 $n \geq N$ のとき

$$a_n = n + 5 \geq N + 5 > M$$

となる。

したがって、十分先のすべての項がどんな基準 M よりも大きくなるため、正の無限大へ発散する。

練習問題 3 の解答・解説

(1) 負の無限大への発散である。

(2) 任意の $M > 0$ を取る。

$N > \frac{M+1}{2}$ となるような正整数 N を選ぶと、 $n \geq N$ のとき

$$a_n = -2n + 1 \leq -2N + 1 < -M$$

となる。

したがって、十分先のすべての項がどんな基準 M に対しても $-M$ より小さくなるため、負の無限大へ発散する。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 振動である。

(2) 数列の項は、 $1, -1, 1, -1, \dots$ のように、偶数番目では -1 、奇数番目では 1 となる。

どれだけ先の項を見ても、 1 と -1 の 2 種類の値を繰り返すため、1 つの有限な実数へ近づかない。また、項の大きさは常に 1 であり、限りなく大きくなったり小さくなったりしないため、正の無限大や負の無限大にも発散しない。

収束せず、正の無限大へも負の無限大へも発散しないため、この数列は振動である。

練習問題 5 の解答・解説

(1) 振動である。

(2) k を正整数とすると、偶数番号と奇数番号の項はそれぞれ $a_{2k} = 2k$

$a_{2k-1} = -(2k-1)$ となる。

したがって、任意の正整数 N より後にも、正の項と負の項がどちらも存在する。

また、正の無限大への発散を考えると、どの正整数 N に対しても $n \geq N$ の中に負の項が存在するため、 $n \geq N$ のすべてで $a_n > 1$ となることはない。同様に、どの正整数 N に対しても正の項が存在するため、 $n \geq N$ のすべてで $a_n < -1$ となることもない。したがって、正の無限大にも負の無限大にも発散しない。

さらに、任意の実数 α と任意の正整数 N を取る。正整数はどこまでも大きく選べるため、 $2k \geq N$ かつ $2k > \alpha + 1$ となる正整数 k を選ぶことができる。このとき、 $a_{2k} = 2k > \alpha + 1$ であるから、偶数項と α の距離は 1 より大きい。

したがって、どの有限の実数 α に対しても、十分先の全項が α に近づくことはない。よって有限の実数へ収束することもなく、この数列は振動する。

練習問題 6 の解答・解説

- (1) 有限収束である。
(2) すべての項が 0 であるため、 $a_n = 0$ が常に成立する。
したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となり、有限収束である。

練習問題 7 の解答・解説

- (1) 有限収束である。
(2) 符号は交互に変わるが、項の大きさを見る。
 $|a_n| = \frac{1}{n}$ である。
任意の正の数 ε を取る。 $N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる正整数 N を選ぶと、 $n \geq N$ のとき

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

となる。したがって、 a_n と 0 の距離は十分先のすべての項で ε より小さくなる。
したがって、 a_n と 0 の距離は $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n}$ となり、0 に近づく。
よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であり、振動ではなく有限収束である。
符号の変化だけで振動と判断してはいけない。

練習問題 8 の解答・解説

- (1) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ について、隣り合う項を比較する。
 $a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)$
整理すると、 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ となる。
これは正であるため、 $a_{n+1} > a_n$ が成立し、数列は単調に増加する。
(2) a_n は単調に増加するが、正の無限大へ発散するわけではない。
1 との差を見ると、 $a_n - 1 = -\frac{1}{n}$ であり、 n が大きくなるとこの差は 0 に近づく。
したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ となる。
よって、単調に増加する数列でも、すべてが正の無限大へ発散するわけではない。