

第 64 講 余事象

学習目標

- ・ 事象 A の余事象の意味を説明できる。
- ・ 事象 A とその余事象が同時に起こらず、2 つで全事象を尽くすことを説明できる。
- ・ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ を使って確率を求められる。
- ・ 「少なくとも 1 つ」の確率を、「1 つもない」の確率を使って求められる。

「 A が起こらない」を 1 つの事象として考える

反対側をまとめて考える

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「4 以上の目が出る」とすると、

$$A = \{4, 5, 6\}$$

です。

このとき、「 A が起こらない」とは、

$$\{1, 2, 3\}$$

のいずれかが出ることです。

このように、事象 A が起こらないすべての場合をまとめた事象を考えると、確率を簡単に求められることがあります。

余事象

事象 A が起こらないという事象を、 A の余事象といい、

$$\overline{A}$$

と表します。

余事象は A 以外のすべて

標本空間の中で、

- ・ A に属する結果
- ・ A に属さない結果

に分けたとき、後者を全部集めたものが $\overline{A}$ です。

余事象は「反対の結果を 1 つだけ選ぶ」のではなく、 A に入らない結果をすべて含みます。

A と余事象の関係

同時には起こらず、どちらかは必ず起こる

事象 A と余事象 $\overline{A}$ には、2 つの重要な性質があります。

1. A と $\overline{A}$ は同時には起こりません。
2. 起こりうる結果は、必ず A または $\overline{A}$ のどちらかに入ります。

つまり、 A と $\overline{A}$ は排反であり、2 つを合わせると全事象になります。

したがって、それぞれの確率を足すと、

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

です。

A と余事象で全体を 2 つに分ける

事象 A と余事象 $\overline{A}$ は、

性質	内容
同時に起こるか	起こらない
2 つを合わせると	全事象になる
確率の合計	1

という関係にあります。

余事象の確率

余事象の確率

事象 A の余事象を $\overline{A}$ とすると、

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

です。

同様に、

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

と考えることもできます。

全体 1 から反対側を引く

公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、事象 A を「4 以上の目が出る」とします。

$$A = \{4, 5, 6\}$$

なので、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

余事象は「4 以上の目が出ない」なので、

$$\overline{A} = \{1, 2, 3\}$$

です。

公式を使うと、

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

です。

直接数えるか、1 から引くか

余事象を利用する問題では、次の 2 つを比べます。

- 求めたい事象を直接数える。
- その反対の事象を数えて、1 から引く。

反対側のほうが簡単に数えられるとき、余事象が特に有効です。

「少なくとも 1 つ」の反対を考える

少なくとも 1 つの反対は 1 つもない

「少なくとも 1 つ」という条件は、

- 1 つある
- 2 つある
- 3 つある
- それ以上ある

という複数の場合を含むことがあります。

これらを直接数えるより、

1 つもない

という反対の事象を考えたほうが簡単なことがあります。

「少なくとも 1 つある」という事象を A とすると、その余事象 $\bar{A}$ は「1 つもない」です。
したがって、

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

を利用できます。

少なくとも 1 つの基本形

「少なくとも 1 つ条件を満たす」の確率は、

$$1 - \text{「1 つも条件を満たさない」の確率}$$

と考えられます。

この講では、起こりうる場合を直接数えられる小規模な問題で使います。

カードを 2 枚選ぶ例

少なくとも 1 枚が赤い

赤いカード 2 枚 R_1, R_2 と、青いカード 2 枚 B_1, B_2 があります。

4 枚から 2 枚を無作為に選び、順序は区別しないものとします。

起こりうる選び方は、

- R_1, R_2
- R_1, B_1
- R_1, B_2
- R_2, B_1
- R_2, B_2
- B_1, B_2

の 6 通りで、同様に確からしいものとします。

事象 A を「少なくとも 1 枚が赤い」とします。

これを直接数えると 5 通りあります。

一方、余事象 $\overline{A}$ は「赤いカードが 1 枚もない」です。

これは、

• B_1, B_2

の 1 通りだけです。

したがって、

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{6}$$

なので、

$$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

です。

少なくとも 1 つとちょうど 1 つを混同しない

「少なくとも 1 つ」は「1 つ以上」という意味です。

たとえば 2 枚を選ぶとき、

「少なくとも 1 枚が赤い」

には、

- 赤 1 枚
- 赤 2 枚

の両方が含まれます。

「ちょうど 1 枚が赤い」とは異なる条件です。

余事象を見つける練習

条件を否定して考える

次のように、条件と余事象を対応させます。

事象 A	余事象 $\overline{A}$
偶数の目が出る	偶数の目が出ない
5 以上の数を選ぶ	5 以上の数を選ばない
少なくとも 1 枚が赤い	赤いカードが 1 枚もない
少なくとも 1 枚が青い	青いカードが 1 枚もない

余事象を考えるときは、「条件を満たさない場合を漏れなく全部集める」ことが大切です。

反対の意味を狭くしすぎない

「3 以上ではない」の余事象を考えるとき、「3 ではない」だけを考えてはいけません。

たとえば 1 から 6 までなら、「3 以上ではない」は、

1, 2

です。

元の条件を満たさない結果をすべて確認します。

余事象を使う手順

基本手順

1. 求めたい事象を A とする。
2. 「 A が起こらない」とは何かを言葉で表す。
3. 余事象 $\bar{A}$ の確率を求める。
4. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ を使う。
5. 答えが 0 以上 1 以下であることを確認する。

例題

例題 1

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「5 以上の目が出る」とします。

- (1) 余事象 $\bar{A}$ を、出る目の集合で表しなさい。
- (2) $P(\bar{A})$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

事象 A は、

$$A = \{5, 6\}$$

です。

- (1) A が起こらない場合は、1 から 4 までの目が出る場合です。
したがって、

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$$

です。

- (2) $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ なので、

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

です。

例題 2

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と書かれた 8 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

「6 以上の数を選ばない」確率を、余事象を使って求めなさい。

例題 2 の解答・解説

事象 A を「6 以上の数を選ぶ」とします。

6 以上のカードは、

$$6, 7, 8$$

の 3 枚なので、

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

です。

求める事象は A の余事象なので、

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

です。

例題 3

赤いカード 3 枚 R_1, R_2, R_3 と青いカード 2 枚 B_1, B_2 があります。

5 枚から 2 枚を無作為に選び、順序は区別しないものとします。

少なくとも 1 枚が赤い確率を、余事象を使って求めなさい。

例題 3 の解答・解説

事象 A を「少なくとも 1 枚が赤い」とします。

余事象 $\overline{A}$ は「赤いカードが 1 枚もない」、つまり青いカード 2 枚を選ぶ場合です。

全体の選び方は、

$${}_5C_2 = 10$$

通りです。

青いカード 2 枚を選ぶ方法は、

$${}_2C_2 = 1$$

通りです。

したがって、

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{10}$$

です。

よって、

$$P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

です。

演習問題

練習問題 1

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。
事象 A を「偶数の目が出る」とします。
余事象 $\overline{A}$ を集合で表し、 $P(\overline{A})$ を求めなさい。

練習問題 2

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 と書かれた 7 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。
事象 A を「3 以下の数を選ぶ」とします。
 $P(\overline{A})$ を求めなさい。

練習問題 3

ある事象 A について、

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

です。
 $P(\overline{A})$ を求めなさい。

練習問題 4

ある事象 A の余事象について、

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{12}$$

です。
 $P(A)$ を求めなさい。

練習問題 5

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。
「4 以上の目が出ない」という事象の確率を、余事象を使って求めなさい。

練習問題 6

赤いカード 2 枚 R_1, R_2 、白いカード 3 枚 W_1, W_2, W_3 があります。
5 枚から 2 枚を無作為に選び、順序は区別しないものとします。
少なくとも 1 枚が赤い確率を、余事象を使って求めなさい。

練習問題 7

青いカード 3 枚 B_1, B_2, B_3 、黄色いカード 3 枚 Y_1, Y_2, Y_3 があります。
6 枚から 2 枚を無作為に選び、順序は区別しないものとします。
少なくとも 1 枚が青い確率を、余事象を使って求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、「少なくとも 1 枚が赤い」という事象の余事象を「赤いカードがちょうど 1 枚である」としました。
この考えの誤りを説明し、正しい余事象を答えなさい。

練習問題 9

1, 2, 3, 4, 5, 6 と書かれた 6 枚のカードから 2 枚を無作為に選び、順序は区別しないものとします。
少なくとも 1 枚が 5 以上の数である確率を、余事象を使って求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

事象 A は、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

です。

したがって、その余事象は、

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$$

です。

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

なので、

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

A は「3 以下の数を選ぶ」なので、

$$A = \{1, 2, 3\}$$

です。
したがって、

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

です。
よって、

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

余事象の確率は、

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

です。
したがって、

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

A と $\overline{A}$ の確率の和は 1 なので、

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

です。
したがって、

$$P(A) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

事象 A を「4 以上の目が出る」とします。

4 以上の目は、

$$4, 5, 6$$

の 3 通りなので、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

求める事象は A の余事象なので、

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

事象 A を「少なくとも 1 枚が赤い」とします。

余事象 $\bar{A}$ は「赤いカードが 1 枚もない」、つまり白いカードだけを 2 枚選ぶ場合です。

全体の選び方は、

$${}_5C_2 = 10$$

通りです。

白いカード 3 枚から 2 枚を選ぶ方法は、

$${}_3C_2 = 3$$

通りです。

したがって、

$$P(\bar{A}) = \frac{3}{10}$$

です。

よって、

$$P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

事象 A を「少なくとも 1 枚が青い」とします。

余事象は「青いカードが 1 枚もない」、つまり黄色いカードだけを 2 枚選ぶ場合です。

全体の選び方は、

$${}_6C_2 = 15$$

通りです。

黄色いカード 3 枚から 2 枚を選ぶ方法は、

$${}_3C_2 = 3$$

通りです。

したがって、

$$P(\overline{A}) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

です。

よって、

$$P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

「少なくとも 1 枚が赤い」には、赤いカードが 1 枚の場合だけでなく、2 枚以上の場合も含まれます。

したがって、その反対は「赤いカードがちょうど 1 枚」ではありません。

正しい余事象は、

赤いカードが 1 枚もない

という事象です。

練習問題 9 の解答・解説

事象 A を「少なくとも 1 枚が 5 以上」とします。
余事象 $\bar{A}$ は「5 以上のカードが 1 枚もない」です。
つまり、1, 2, 3, 4 の 4 枚から 2 枚を選ぶ場合です。
全体の選び方は、

$${}_6C_2 = 15$$

通りです。
余事象の場合の数は、

$${}_4C_2 = 6$$

通りです。
したがって、

$$P(\bar{A}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

です。
よって、

$$P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

です。