

第 147 講 漸化式とは何か

学習目標

- ・ 漸化式が数列の項どうしの関係を表す式であることを理解する。
- ・ 初項と漸化式から、数列の項を順に求めることができる。
- ・ 一般項と漸化式の違いを説明できる。

数列を順につなぐ考え方

本講では n は正整数、各項は実数とする。

数列では、各項を並べた形だけでなく、項どうしの関係によって数列を定めることができる。

例えば、最初の項が 1 で、次の項は「前の項を 2 倍して 1 を加える」と決めた数列を考える。

この規則では、前の項が分かれば次の項を計算できる。したがって、 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ のような式で、隣り合う項の関係を表せる。

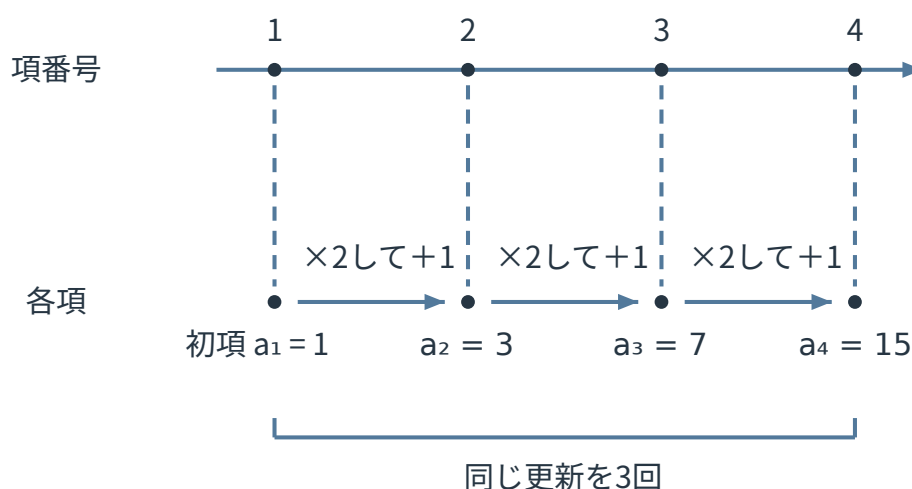


図 1 初項 $a_1 = 1$ 、漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ と定めた数列の具体例である。下段は値を距離で表さない対応列であり、「 $\times 2$ して $+1$ 」を 3 回繰り返して $a_4 = 15$ を得る。

このように、数列のある項を、その前の項などを使って表す式を漸化式という。

漸化式では、次の項を求める計算の出発点として初項が必要になる。例えば、 $a_1 = 1$ と $a_{n+1} = 2a_n + 1$ が与えられると、 a_2, a_3, a_4 の順に計算できる。

漸化式で大切なのは、「どの項を使って次の項を決めるか」である。 n は項の番号を表す正整数であり、 a_n は第 n 項の値を表す。 a_{n+1} は第 $n+1$ 項を表し、 $a_n + 1$ は第 n 項の値に 1 を加えたものを表すため両者の意味は異なるが、漸化式の条件によって両者の値が等しくなる数列もある。

漸化式の定義

数列 $\{a_n\}$ において、ある項と次の項などの関係を表す式を漸化式という。

例えば、 $a_{n+1} = a_n + 3$

は「第 $n+1$ 項は、第 n 項に 3 を加えた値である」という関係を表している。

漸化式だけでは数列が 1 つに決まらない場合がある。例えば、 $a_{n+1} = a_n + 2$ という関係だけでは、初項が 1 の数列
1, 3, 5, 7, ...
も、初項が 10 の数列
10, 12, 14, 16, ...
も同じ関係を満たす。
したがって、数列を 1 つに決めるには、通常は初項などの条件が必要になる。

一般項との違い

数列を表す方法には、一般項を使う方法もある。

一般項とは、第 n 項を直接表す式である。例えば、 $a_n = 3n + 1$ と与えられると、 n に値を代入するだけで任意の項を求められる。
一方、漸化式では、前の項との関係を使って順番に項を求める。

- ・ 一般項：第 n 項そのものを表す。
- ・ 漸化式：項どうしのつながりを表す。

表し方は異なるが、同じ数列を表すこともある。

ただし、最初の数項が一致するだけでは、同じ数列であるとは限らない。与えられた一般項候補が正しいか確かめるには、初項だけでなく、すべての正整数 n で関係式を満たすことを確認する必要がある。

漸化式を使う条件

初項と漸化式があれば、必ず数列が決まるわけではない。

例えば、

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$$

では、 $a_1 = 0$ のとき、

$$a_2 = \frac{1}{a_1}$$

を計算できず、次の項が定まらない。

漸化式を使うには、各段階で次の項が 1 つの値として計算できる条件が必要である。

例題 1

数列 $\{a_n\}$ が、初項 $a_1 = 3$ 、漸化式 $a_{n+1} = a_n + 4$ で定められている。
 a_2 、 a_3 、 a_4 を求めよ。

例題 1 の解答・解説

漸化式は、前の項から次の項を求める関係を表している。
初項から順に計算する。

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + 4 \\&= 3 + 4 \\&= 7 \\a_3 &= a_2 + 4 \\&= 7 + 4 \\&= 11 \\a_4 &= a_3 + 4 \\&= 11 + 4 \\&= 15\end{aligned}$$

したがって、 $a_2 = 7$ 、 $a_3 = 11$ 、 $a_4 = 15$ である。
前の項を使って次の項を計算することが、漸化式の基本的な使い方である。

例題 2

数列 $\{a_n\}$ が、初項 $a_1 = 2$ 、漸化式 $a_{n+1} = a_n + n$ で定められている。
 a_2 、 a_3 、 a_4 を求めよ。

例題 2 の解答・解説

この漸化式では、前の項だけでなく項番号 n も使う。

$$n = 1 \text{ のとき、} a_2 = a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$n = 2 \text{ のとき、} a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$n = 3 \text{ のとき、} a_4 = a_3 + 3 = 5 + 3 = 8$$

したがって、 $a_2 = 3$ 、 $a_3 = 5$ 、 $a_4 = 8$ である。

n を代入する位置を間違えないことが重要である。 $a_n + n$ の n は項番号を表す。

例題 3

数列 $\{a_n\}$ が、初項 $a_1 = 4$ 、漸化式 $a_{n+1} = a_n + 2$ で定められている。
一般項の候補として $a_n = 2n + 2$ が与えられた。この式が正しいか確認せよ。

例題 3 の解答・解説

まず、初項を確認する。

$n = 1$ を代入すると、 $a_1 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ となり、初項の条件を満たす。

次に、漸化式を満たすか確認する。

候補の式から、 $a_{n+1} = 2(n+1) + 2$ であるから、 $a_{n+1} = 2n + 4$ となる。

一方、 $a_n + 2 = (2n + 2) + 2 = 2n + 4$ である。

したがって、任意の正整数 n で

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

が成り立つ。

初項と、すべての正整数 n における更新式の両方を満たしていることが確認できた。

また、この更新式では前の項の値から次の項の値が一意に定まる。

したがって、 $a_n = 2n + 2$ は与えられた数列の一般項である。

数項だけを比べるのではなく、すべての n で関係式が成立するかを確認することが必要である。

演習問題

練習問題 1

数列 $\{a_n\}$ が、初項 $a_1 = 5$ 、漸化式 $a_{n+1} = 3a_n$ で定められている。

a_2 、 a_3 、 a_4 を求めよ。

練習問題 2

数列 $\{a_n\}$ が、初項 $a_1 = -2$ 、漸化式 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}$ で定められている。

a_2 、 a_3 、 a_4 を求めよ。

練習問題 3

数列 $\{a_n\}$ が、初項 $a_1 = 6$ 、漸化式 $a_{n+1} = a_n + 2n$ で定められている。

a_2 、 a_3 、 a_4 を求めよ。

練習問題 4

数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1 = 4$ 、漸化式 $a_{n+1} = a_n + 3$ で定められている。

次の 2 つの一般項候補について、初項とすべての正整数 n における更新式の両方を満たすか判定せよ。

(1) $a_n = 3n + 2$

(2) $a_n = n^2 + 3$

最初の数項だけが一致する場合と、すべての n で条件を満たす場合の違いに注意すること。

練習問題 5

数列 $\{a_n\}$ の一般項候補として $a_n = n^2$ が与えられている。

初項 $a_1 = 1$ を満たすか確認したうえで、漸化式 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ を満たすか確認せよ。

練習問題 6

漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 3$

だけが与えられている。

この関係を満たす数列を 2 つ以上挙げ、それぞれ異なる初項を持つことを示せ。

練習問題 7

次の説明の誤りを指摘し、正しい意味を説明せよ。

「 a_{n+1} という記号だけで a_n に 1 を足した値を表す。だから、どんな数列でも $a_{n+1} = a_n + 1$ が成り立つ。」

練習問題 8

数列 $\{a_n\}$ が、初項 $a_1 = 2$ 、漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$$

で定められている。

(1) a_2 、 a_3 を求めよ。

(2) この漸化式で、途中の計算ができなくなる可能性があるか。条件を説明せよ。

練習問題 1 の解答・解説

漸化式に従い、前の項を 3 倍して次の項を求める。

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 \\ &= 3 \times 5 \\ &= 15 \\ a_3 &= 3a_2 \\ &= 3 \times 15 \\ &= 45 \\ a_4 &= 3a_3 \\ &= 3 \times 45 \\ &= 135 \end{aligned}$$

したがって、 $a_2 = 15$ 、 $a_3 = 45$ 、 $a_4 = 135$ である。

練習問題 2 の解答・解説

更新式の中に負の値と分数が含まれる場合も、同じように前の項から計算する。

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 - \frac{1}{2} \\&= -2 - \frac{1}{2} \\&= -\frac{5}{2} \\a_3 &= a_2 - \frac{1}{2} \\&= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\&= -3 \\a_4 &= a_3 - \frac{1}{2} \\&= -3 - \frac{1}{2} \\&= -\frac{7}{2}\end{aligned}$$

したがって、 $a_2 = -\frac{5}{2}$ 、 $a_3 = -3$ 、 $a_4 = -\frac{7}{2}$ である。

練習問題 3 の解答・解説

この漸化式では、前の項だけでなく n の値も使う。

$$n = 1 \text{ のとき、} a_2 = a_1 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$$

$$n = 2 \text{ のとき、} a_3 = a_2 + 2 \times 2 = 8 + 4 = 12$$

$$n = 3 \text{ のとき、} a_4 = a_3 + 2 \times 3 = 12 + 6 = 18$$

したがって、 $a_2 = 8$ 、 $a_3 = 12$ 、 $a_4 = 18$ である。

$2n$ の n は、その計算で求める項の前の番号を表している。

練習問題 4 の解答・解説

(1) $a_n = 3n + 2$

初項を確認すると、 $a_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$ となる。

これは条件の $a_1 = 4$ と一致しない。

なお、更新式については、 $a_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 5$

また、 $a_n + 3 = (3n + 2) + 3 = 3n + 5$ であるため、すべての正整数 n で更新式は満たす。

しかし、初項を満たさないため不合格である。

(2) $a_n = n^2 + 3$

初項を確認すると、 $a_1 = 1^2 + 3 = 4$ となり、初項の条件は満たす。

次に更新式を確認する。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 + 3 \\ &= n^2 + 2n + 4 \end{aligned}$$

一方、 $a_n + 3 = n^2 + 3 + 3 = n^2 + 6$ である。

両者は一般には一致しない。

実際、 $n = 2$ のとき、 $a_3 - a_2 = 5$ となり、増加量は 3 ではない。

したがって、初項は満たすが更新式を満たさないため不合格である。

最初の 2 項が合っている、すべての正整数 n で更新式が成り立つとは限らない。

練習問題 5 の解答・解説

まず初項を確認する。

$$a_1 = 1^2 = 1$$

よって初項の条件は満たす。

次に、漸化式を確認する。

候補式より、 $a_{n+1} = (n+1)^2$ である。

一方、

$$\begin{aligned} a_n + 2n + 1 &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

となる。

したがって、任意の正整数 n で

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

が成立する。

よって、この一般項候補は初項と漸化式の両方を満たす。

最初の数項だけを見るのではなく、すべての n について確認することが必要である。

練習問題 6 の解答・解説

初項が指定されていないため、同じ漸化式を満たす数列を複数作ることができる。

例えば、初項を $a_1 = 0$ とし、以後すべての正整数 n について

$$a_{n+1} = 2a_n + 3$$

で次の項を定める。

すると、 $0, 3, 9, 21, \dots$

という数列になる。

また、初項を $a_1 = 1$ とし、同じ規則で定めると、 $1, 5, 13, 29, \dots$

という別の数列になる。

更新式の右辺 $2a_n + 3$ は、任意の実数 a_n に対して 1 つの実数を返すため、各段階で次の項を一意に定められる。

したがって、初項が異なるこの 2 つの数列は、どちらも同じ漸化式を満たす。

漸化式だけでは数列を 1 つに決められず、初項などの条件が必要になる場合がある。

練習問題 7 の解答・解説

この説明は誤りである。

添字の $n+1$ は項の位置を示し、 a_{n+1} は第 $n+1$ 項の値を表す。一方、 $a_n + 1$ は第 n 項の値に 1 を加えたものを表す。

したがって、添字の $n+1$ と、値に対する加算の $+1$ は意味が異なる。

例えば、初項が 3 で、更新式 $a_{n+1} = a_n + 2$

で定められる数列では、 $a_2 = 5$ となる。

一方、 $a_1 + 1 = 3 + 1 = 4$ である。

このため、 a_2 と $a_1 + 1$ は同じ値ではない。

ただし、更新式として

$$a_{n+1} = a_n + 1$$

が与えられている場合は、その数列において両辺の値が等しいことが条件として定められている。

記号そのものの意味と、漸化式によって成立する関係は区別する必要がある。

練習問題 8 の解答・解説

(1)

初項から順に計算する。

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{a_1 + 1} \\ &= \frac{1}{2 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

次に、

$$\begin{aligned}a_3 &= \frac{1}{a_2 + 1} \\&= \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} \\&= \frac{1}{\frac{4}{3}} \\&= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

したがって、 $a_2 = \frac{1}{3}$ 、 $a_3 = \frac{3}{4}$ である。

(2)

今回の数列は初項が $a_1 = 2$ であるため、最初の項は正である。

もし $a_n > 0$ なら、

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$$

の分母は正になり、 $a_{n+1} > 0$ となる。

したがって、この数列では各項が正の値を保ち、次の項を計算するときに分母が 0 になることはない。

よって、今回の数列はすべての段階で計算でき、途中で計算不能にはならない。

一般には、ある項で

$a_n = -1$ となる場合は分母が 0 になり、

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$$

は定義できない。