

第 92 講 直線の方程式

学習目標

- 直線の傾きが、 x の変化量に対する y の変化量を表すことを理解できる。
- 傾きと 1 点を与えられたとき、直線の方程式を求められる。
- 2 点を与えられたとき、傾きを求めて直線の方程式を作れる。
- 垂直な直線 $x = a$ と水平な直線 $y = b$ を正しく扱える。
- 求めた方程式へ点の座標を代入し、式が正しいか確認できる。

1. 直線の傾き

傾きは「横に進んだときの縦の変化」である

座標平面上の直線では、 x がどれだけ変化したときに y がどれだけ変化するかを見ると、直線の傾き方を数で表せる。

異なる 2 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ を通る直線を考える。ただし、 $x_1 \neq x_2$ とする。このとき、傾き m は

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

である。

分子 $y_2 - y_1$ は y の変化量、分母 $x_2 - x_1$ は x の変化量である。したがって、傾きは「 x の変化量 1 に対して、 y がどれだけ変化するか」を表している。

たとえば、傾きが 2 ならば、 x が 1 増えると y は 2 増える。傾きが -3 ならば、 x が 1 増えると y は 3 減る。

傾きの分母が 0 になる場合

傾きの公式を使えるのは $x_1 \neq x_2$ のときだけである。

$x_1 = x_2$ ならば、

$$x_2 - x_1 = 0$$

となり、傾きの公式では 0 で割ることになるため計算できない。

この場合、2 点は同じ x 座標をもち、直線は縦向きである。 x 座標が a で一定ならば、その直線の方程式は $x = a$ である。

2. 傾きと 1 点から直線の方程式を作る

1 点からの変化を式にする

傾き m の直線が点 (x_1, y_1) を通るとする。

点 (x_1, y_1) から直線上の点 (x, y) までの x の変化量は $x - x_1$ である。傾きが m であるため、 y の変化量は $m(x - x_1)$ となる。

したがって、

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

が成り立つ。

この式は、傾きと通る 1 点から直線の方程式を作る基本形である。符号を間違えやすいため、点 (x_1, y_1) をそのまま

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

へ入れてから展開すると安全である。

傾きと1点から求める手順

1. 傾きを m とする。
2. 通る点を (x_1, y_1) とする。
3. $y - y_1 = m(x - x_1)$ へ代入する。
4. 必要に応じて式を整理する。
5. 最後に通る点の座標を代入し、等式が成り立つか確認する。

例題 1

傾きが3で、点 $(2, -1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

例題 1 の解答・解説

傾きは $m = 3$ 、通る点は $(2, -1)$ である。
基本形 $y - y_1 = m(x - x_1)$ へ代入すると、

$$y - (-1) = 3(x - 2)$$

である。左辺と右辺を整理すると、

$$y + 1 = 3(x - 2)$$

$$y + 1 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 7$$

したがって、求める直線の方程式は $y = 3x - 7$ である。

点 $(2, -1)$ を代入して確認すると、右辺は $3 \cdot 2 - 7 = -1$ となり、 y 座標と一致する。したがって、求めた式は与えられた点を正しく通っている。

3. 2点から直線の方程式を作る**最初に x 座標が等しいかを見る**

2点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ から直線の方程式を求めるときは、いきなり傾きの公式へ代入するのではなく、最初に x_1 と x_2 を比べる。

$x_1 \neq x_2$ ならば、

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

で傾きを求め、その後に1点を使って

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

とすればよい。

一方、 $x_1 = x_2$ ならば傾きは定まらず、直線は縦向きである。この場合は $x = x_1$ と書く。

2点の y 座標が等しい場合は、 y が一定であるため水平な直線となる。 y 座標が b ならば方程式は $y = b$ である。

例題 2

2点 $A(-1, 4)$ 、 $B(3, -2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

例題 2 の解答・解説

2 点の x 座標は -1 と 3 で異なるため、傾きを求められる。

$$\begin{aligned} m &= \frac{-2 - 4}{3 - (-1)} \\ &= \frac{-6}{4} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

点 $A(-1, 4)$ を使うと、

$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

である。整理すると、

$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

したがって、求める直線の方程式は $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ である。

点 $A(-1, 4)$ を代入すると右辺は 4 となり、点 $B(3, -2)$ を代入すると右辺は -2 となる。両方の点について座標が式を満たすため、計算を確認できる。

例題 3

次の 2 点を通る直線の方程式をそれぞれ求めよ。

(1) $A(-2, 3)$ 、 $B(5, 3)$

(2) $C(-4, 1)$ 、 $D(-4, 6)$

例題 3 の解答・解説

(1) 2 点の y 座標はどちらも 3 である。直線上では y が常に 3 であるため、求める方程式は $y = 3$ である。実際、傾きを計算すると、

$$m = \frac{3 - 3}{5 - (-2)} = 0$$

となり、水平な直線であることも確認できる。

(2) 2 点の x 座標はどちらも -4 である。傾きの公式では分母が

$$-4 - (-4) = 0$$

となるため、傾きは求められない。

この直線上では x が常に -4 であるため、求める方程式は $x = -4$ である。

4. 求めた式を座標代入で確認する

直線上の点は方程式を満たす

直線の方程式は、その直線上にある点の x 座標と y 座標の関係を表している。

したがって、ある点が直線上にあるか確かめるには、その点の x 座標と y 座標を方程式へ代入すればよい。

左辺と右辺が一致すれば、その点は方程式を満たす。反対に、一致しなければその点はその直線上にない。

直線の方程式を求めた後に、問題で与えられた点を代入して確認すると、符号の間違いや展開ミスを見つけやすい。

例題 4

直線 $y = -2x + 5$ について、次の点が直線上にあるか調べよ。

(1) $P(3, -1)$

(2) $Q(-1, 7)$

(3) $R(0, 4)$

例題 4 の解答・解説

(1) $x = 3$ を右辺へ代入すると、

$$-2 \cdot 3 + 5 = -1$$

となる。これは P の y 座標 -1 と一致するため、 P は直線上にある。

(2) $x = -1$ を右辺へ代入すると、

$$-2 \cdot (-1) + 5 = 7$$

となる。これは Q の y 座標 7 と一致するため、 Q は直線上にある。

(3) $x = 0$ を右辺へ代入すると、

$$-2 \cdot 0 + 5 = 5$$

となる。しかし、 R の y 座標は 4 である。値が一致しないため、 R は直線上にない。

5. 演習問題

演習問題 1

傾きが 2 で、点 $(3, -2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

演習問題 2

傾きが $-\frac{1}{2}$ で、点 $(-3, 4)$ を通る直線の方程式を求めよ。

演習問題 3

2点 $A(-2, 1)$ 、 $B(4, 7)$ を通る直線の方程式を求めよ。

演習問題 4

2点 $A(1, 5)$ 、 $B(5, -1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

演習問題 5

点 $(2, -4)$ を通る水平な直線の方程式を求めよ。

演習問題 6

点 $(-5, 3)$ を通る垂直な直線の方程式を求めよ。

演習問題 7

直線 $y = 3x - 2$ について、次の点が直線上にあるか調べよ。

- (1) $A(2, 4)$
- (2) $B(-1, -5)$
- (3) $C(0, -1)$

演習問題 8

2点 $A(2, 5)$ 、 $B(6, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。また、求めた方程式へ A 、 B の座標をそれぞれ代入して確認せよ。

6. 演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

傾きは $m = 2$ 、通る点は $(3, -2)$ である。

$$y - (-2) = 2(x - 3)$$

より、

$$y + 2 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 8$$

したがって、求める直線の方程式は $y = 2x - 8$ である。

$x = 3$ を代入すると右辺は $2 \cdot 3 - 8 = -2$ となり、与えられた点の y 座標と一致する。

演習問題 2 の解答・解説

傾きは $m = -\frac{1}{2}$ 、通る点は $(-3, 4)$ である。

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 3)$$

より、

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

したがって、求める直線の方程式は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ である。

$x = -3$ を代入すると右辺は 4 となり、与えられた点の y 座標と一致する。

演習問題 3 の解答・解説

2 点の x 座標は異なるため、傾きを求める。

$$\begin{aligned} m &= \frac{7-1}{4-(-2)} \\ &= \frac{6}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

点 $A(-2, 1)$ を使うと、

$$y - 1 = x + 2$$

である。整理して、 $y = x + 3$ となる。

確認すると、 $x = -2$ のとき $y = 1$ 、 $x = 4$ のとき $y = 7$ となるため、2 点の座標をともに満たしている。したがって、求める直線の方程式は $y = x + 3$ である。

演習問題 4 の解答・解説

2 点の x 座標は異なるため、傾きを求める。

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1-5}{5-1} \\ &= \frac{-6}{4} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

点 $A(1, 5)$ を使うと、

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

である。整理すると、

$$\begin{aligned} y - 5 &= -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$x = 1$ を代入すると $y = 5$ 、 $x = 5$ を代入すると $y = -1$ となるため、2 点の座標をともに満たしている。したがって、求める直線の方程式は $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$ である。

演習問題 5 の解答・解説

水平な直線では、どの点でも y 座標が一定である。

与えられた点 $(2, -4)$ の y 座標は -4 であるため、求める直線の方程式は $y = -4$ である。

この式では x の値が変わっても y は常に -4 である。

演習問題 6 の解答・解説

垂直な直線では、どの点でも x 座標が一定である。

与えられた点 $(-5, 3)$ の x 座標は -5 であるため、求める直線の方程式は $x = -5$ である。

垂直な直線では x の変化量が 0 となるため、傾きの公式を使って傾きを求めることはできない。

演習問題 7 の解答・解説

(1) $x = 2$ を右辺へ代入すると、

$$3 \cdot 2 - 2 = 4$$

となり、 A の y 座標と一致する。したがって、 A は直線上にある。

(2) $x = -1$ を右辺へ代入すると、

$$3 \cdot (-1) - 2 = -5$$

となり、 B の y 座標と一致する。したがって、 B は直線上にある。

(3) $x = 0$ を右辺へ代入すると、

$$3 \cdot 0 - 2 = -2$$

となる。しかし、 C の y 座標は -1 であるため一致しない。したがって、 C は直線上にない。

演習問題 8 の解答・解説

2 点の x 座標は異なるため、傾きを求める。

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 - 5}{6 - 2} \\ &= \frac{-4}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

点 $A(2, 5)$ を使うと、

$$y - 5 = -(x - 2)$$

である。整理すると、

$$\begin{aligned} y - 5 &= -x + 2 \\ y &= -x + 7 \end{aligned}$$

したがって、求める直線の方程式は $y = -x + 7$ である。

点 $A(2, 5)$ を代入すると、右辺は $-2 + 7 = 5$ となり、 y 座標と一致する。

点 $B(6, 1)$ を代入すると、右辺は $-6 + 7 = 1$ となり、 y 座標と一致する。

よって、求めた方程式は与えられた 2 点をともに通っている。