

第 28 講 二次関数の平行移動

学習目標

- グラフの平行移動を、形を変えずにすべての点を同じ向きへ同じ距離だけ動かすこととして説明できる。
- $y = ax^2$ を上下へ平行移動したグラフの式を求められる。
- $y = ax^2$ を左右へ平行移動したグラフの式を求められる。
- $y = ax^2$ を上下・左右へ組み合わせて平行移動したグラフの式を求められる。

平行移動ではグラフの形は変わらない

すべての点を同じだけ動かす

グラフを平行移動するとは、グラフ上のすべての点を同じ向きへ同じ距離だけ動かすことです。たとえば、 $y = x^2$ のグラフを上へ 2 だけ平行移動すると、点 $(0, 0)$ は $(0, 2)$ へ、点 $(1, 1)$ は $(1, 3)$ へ移ります。

x 座標は変わらず、すべての y 座標に 2 が加わっています。
したがって、移動後のグラフは $y = x^2 + 2$ です。

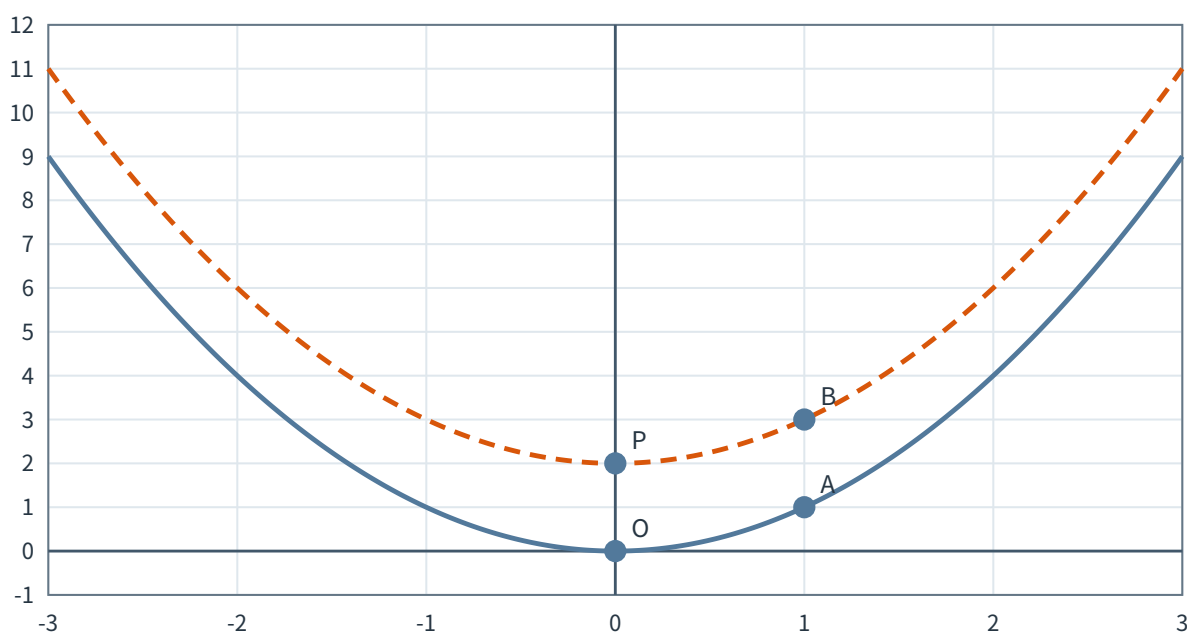


図 1 $y = x^2$ を上へ 2 平行移動

グラフの平行移動

グラフ上のすべての点を、同じ向きへ同じ距離だけ移すことを、グラフの**平行移動**といいます。平行移動では、グラフそのものの形は変わりません。

上下への平行移動

上下移動は式の外側で足し引きする

$y = ax^2$ のグラフ上の点をすべて上へ q だけ動かすと、同じ x に対する y の値がすべて q だけ増えます。

したがって、移動後の式は、

$$y = ax^2 + q$$

です。

反対に、下へ q だけ動かすと、すべての y の値が q だけ減るので、

$$y = ax^2 - q$$

となります。

上下への平行移動

$q > 0$ とします。

$y = ax^2$ を上へ q 平行移動すると、

$$y = ax^2 + q$$

です。

下へ q 平行移動すると、

$$y = ax^2 - q$$

です。

上下移動では、式の**外側**に移動量を足したり引いたりします。

上下へ動かす

$y = 2x^2$ を上へ 3 平行移動すると、 $y = 2x^2 + 3$ です。

$y = 2x^2$ を下へ 5 平行移動すると、 $y = 2x^2 - 5$ です。

係数 2 は変わらないので、グラフの開く向きや広がり方も変わりません。

右への平行移動

右へ動かすと x を $x-p$ に置き換える

$y = x^2$ を右へ 2 平行移動する場合を考えます。

元のグラフの点 $(0, 0)$ は $(2, 0)$ へ移ります。

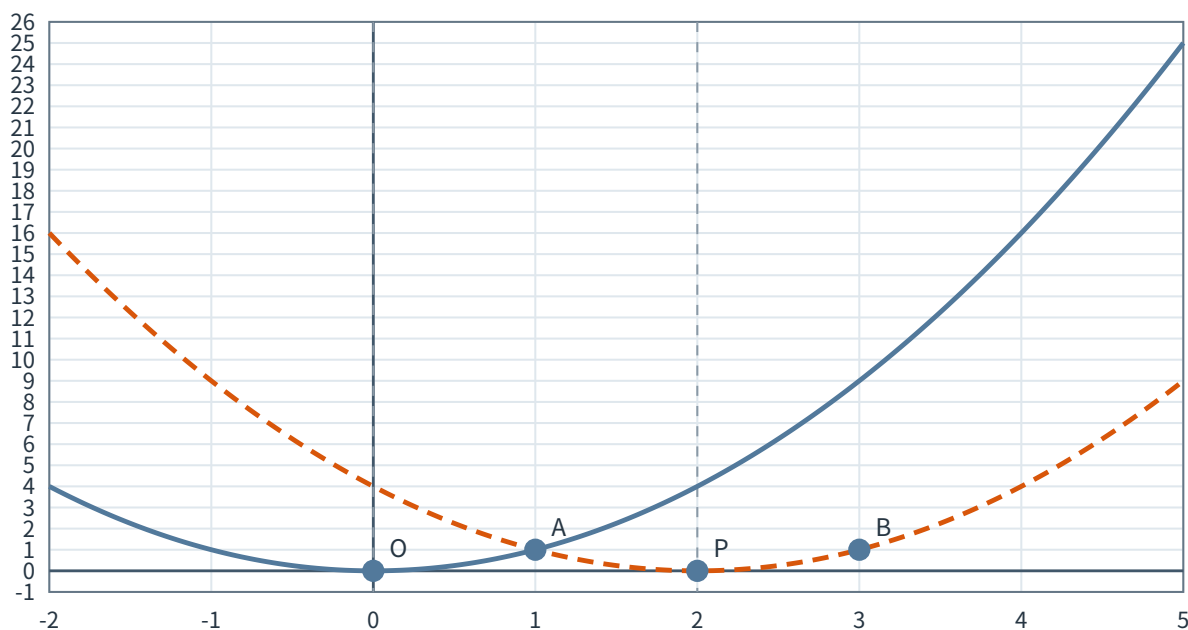
移動後のグラフで $x = 2$ のとき $y = 0$ になる式は、

$$y = (x - 2)^2$$

です。

ここで「右へ 2 なのに、式では $x - 2$ 」となる点が重要です。

移動後の位置 x から 2 を引くと、移動前の位置 $x - 2$ に戻るためです。

図2 $y = x^2$ を右へ2平行移動

右への平行移動

$p > 0$ とします。

$y = ax^2$ を右へ p 平行移動すると、

$$y = a(x - p)^2$$

です。

右へ動かすときは、 x を $x - p$ に置き換えます。

右移動では符号が逆に見える

「右へ3」だから $x + 3$ とするのはありません。

右へ3平行移動した式は、

$$y = a(x - 3)^2$$

です。

式のかっこの中では、移動方向と符号が逆に見えることに注意します。

左への平行移動

左へ動かすと x を $x + p$ に置き換える

$y = ax^2$ を左へ p 平行移動すると、元の点 $(0, 0)$ は $(-p, 0)$ へ移ります。

$x = -p$ のとき、かっこの中が0になる式を考えると、

$$y = a(x + p)^2$$

です。

たとえば $y = x^2$ を左へ4動かすと、 $y = (x + 4)^2$ になります。

左右への平行移動

$p > 0$ とします。
右へ p 平行移動すると、

$$y = a(x - p)^2$$

です。
左へ p 平行移動すると、

$$y = a(x + p)^2$$

です。
左右移動では、かっこの中の符号に注意します。

上下と左右を組み合わせる

横に動かしてから縦に動かす

$y = ax^2$ を右へ p 、上へ q 平行移動するとします。
右へ p 動かした式は $y = a(x - p)^2$ です。
さらに上へ q 動かすので、

$$y = a(x - p)^2 + q$$

となります。
この式は、「 $y = ax^2$ と同じ形のグラフを、右へ p 、上へ q 動かしたもの」と読めます。

平行移動を式から読む

$y = a(x - p)^2 + q$ は、 $y = ax^2$ を右へ p 、上へ q 平行移動したグラフです。
たとえば $y = 2(x - 3)^2 + 4$ は、 $y = 2x^2$ を右へ 3、上へ 4 平行移動したものです。

この講では式の形を平行移動として読む

この講では、 $y = ax^2$ のグラフをどの方向へどれだけ動かしたかに注目します。
一般の二次式をこの形へ変形する手順は、次の「平方完成」で扱います。
また、一般の二次関数について軸や頂点を体系的に判断する方法は、その後の講で扱います。

例題

例題 1

二次関数 $y = 2x^2$ のグラフを上へ 5 平行移動したグラフの式を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

上へ 5 平行移動すると、すべての y の値に 5 を加えます。
したがって、移動後の式は $y = 2x^2 + 5$ です。

例題 2

二次関数 $y = -x^2$ のグラフを右へ 3 平行移動したグラフの式を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

右へ 3 平行移動すると、 x を $x - 3$ に置き換えます。

したがって、移動後の式は $y = -(x - 3)^2$ です。

係数 -1 は変わらないので、グラフは平行移動後も下に開きます。

例題 3

二次関数 $y = 3x^2$ のグラフを左へ 2、下へ 4 平行移動したグラフの式を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

左へ 2 平行移動するので、 x を $x + 2$ に置き換えます。

この時点で $y = 3(x + 2)^2$ です。

さらに下へ 4 平行移動するので、

$$y = 3(x + 2)^2 - 4$$

となります。

演習問題**練習問題 1**

二次関数 $y = x^2$ のグラフを上へ 4 平行移動したグラフの式を求めなさい。

練習問題 2

二次関数 $y = 2x^2$ のグラフを下へ 3 平行移動したグラフの式を求めなさい。

練習問題 3

二次関数 $y = x^2$ のグラフを右へ 5 平行移動したグラフの式を求めなさい。

練習問題 4

二次関数 $y = -2x^2$ のグラフを左へ 3 平行移動したグラフの式を求めなさい。

練習問題 5

二次関数 $y = 2x^2$ のグラフを右へ 4、上へ 1 平行移動したグラフの式を求めなさい。

練習問題 6

二次関数 $y = -3x^2$ のグラフを左へ 2、下へ 5 平行移動したグラフの式を求めなさい。

練習問題 7

次の二次関数が、もとの $y = x^2$ のグラフをどの向きへどれだけ平行移動したのか答えなさい。

(1) $y = (x - 6)^2 + 2$

(2) $y = (x + 3)^2 - 4$

練習問題 8

ある生徒は、 $y = x^2$ を右へ 4 平行移動すると $y = (x + 4)^2$ になると考えました。
この考えの誤りを説明し、正しい式を書きなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

上へ 4 平行移動するので、 y の値に 4 を加えます。
したがって、 $y = x^2 + 4$ です。

練習問題 2 の解答・解説

下へ 3 平行移動するので、 y の値から 3 を引きます。
したがって、 $y = 2x^2 - 3$ です。

練習問題 3 の解答・解説

右へ 5 平行移動するので、 x を $x - 5$ に置き換えます。
したがって、 $y = (x - 5)^2$ です。

練習問題 4 の解答・解説

左へ 3 平行移動するので、 x を $x + 3$ に置き換えます。
したがって、 $y = -2(x + 3)^2$ です。

練習問題 5 の解答・解説

右へ 4 平行移動すると、 $y = 2(x - 4)^2$ です。
さらに上へ 1 平行移動します。
したがって、 $y = 2(x - 4)^2 + 1$ です。

練習問題 6 の解答・解説

左へ 2 平行移動すると、 $y = -3(x + 2)^2$ です。
さらに下へ 5 平行移動します。
したがって、 $y = -3(x + 2)^2 - 5$ です。

練習問題 7 の解答・解説

- (1) $(x - 6)^2$ は右へ 6 の移動を表し、外側の $+2$ は上へ 2 の移動を表します。
したがって、右へ 6、上へ 2 の平行移動です。
- (2) $(x + 3)^2$ は左へ 3 の移動を表し、外側の -4 は下へ 4 の移動を表します。
したがって、左へ 3、下へ 4 の平行移動です。

練習問題 8 の解答・解説

右へ 4 平行移動するときは、 x を $x - 4$ に置き換えます。
 $y = (x + 4)^2$ では、 $x = -4$ のとき値が 0 になるため、これは左へ 4 平行移動したグラフです。
したがって、正しい式は $y = (x - 4)^2$ です。