

第 153 講 数学的帰納法

学習目標

この講では、正整数 n 全体に成り立つ命題を証明するための数学的帰納法の考え方を理解する。具体的には、次のことができるようになることを目標とする。

- 命題 $P(n)$ を用いて、証明したい内容を整理できる。
- 出発点 $P(1)$ を証明する意味を説明できる。
- 任意の正整数 k について、 $P(k)$ が成立すると仮定し、 $P(k+1)$ を導く流れを記述できる。
- 帰納段階で、どの部分に仮定 $P(k)$ を使ったかを明示できる。
- 数例が成立することと、すべての正整数で成立することの違いを理解できる。

数学的帰納法の原理

正整数 n に関する命題 $P(n)$ を証明したいとする。

数学的帰納法では、次の 2 つを示すことで、すべての正整数 n について $P(n)$ が成立すると結論づける。

1 つ目は、最初の値である $P(1)$ を証明することである。これは、無限に続く列の出発点を確定する作業である。

2 つ目は、任意の正整数 k について、 $P(k)$ が成立すると仮定したときに $P(k+1)$ を導くことである。この仮定は帰納法の中でだけ使う条件付きの仮定であり、最初から証明したい命題全体や $P(k+1)$ を認めているわけではない。

この 2 段階がそろると、 $P(1)$ から $P(2)$ 、 $P(2)$ から $P(3)$ 、というように次々と成立することが分かる。

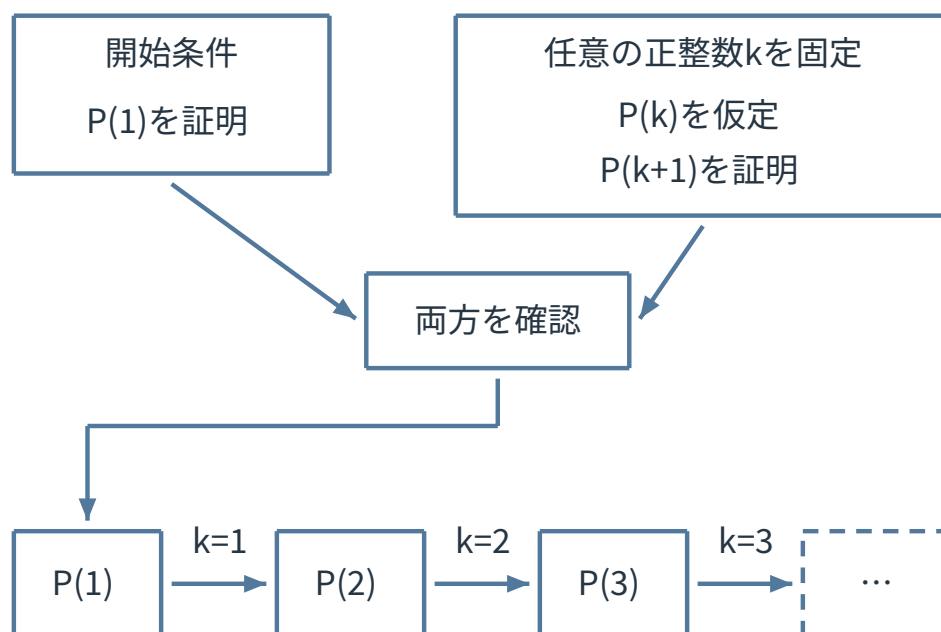


図1 開始条件と一段進む論証の両方を示す。右上では任意に固定した正整数 k で $P(k)$ を仮定し、 $P(k+1)$ を導く。下段はこの論証を順に適用する例であり、3 例だけを確認した証明ではない。

図では、出発点を確定することと、1 段階先へ進む規則を確定することの両方が必要であることを表している。

なぜ全正整数へ届くのか

数学的帰納法は、階段を一段ずつ上ることに似ている。

ただし、重要なのは「最初の段に立てること」と「どの段にいても次の段へ移れること」の両方である。

- $P(1)$ の証明だけでは、最初の 1 つが正しいことしか分らない。
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ だけでは、出発地点がないため実際に進み始められない。
- 数個の値を調べるだけでは、無限に続くすべての正整数を保証できない。

数学的帰納法では、出発点と次へ進む仕組みを同時に証明することで、全正整数へ結論を広げる。

証明の手順

数学的帰納法による証明は、次の流れで書く。

1. 証明したい命題を $P(n)$ と置く。
2. 基底として $P(1)$ を証明する。
3. 任意の正整数 k を固定し、 $P(k)$ が成立すると仮定する。
4. その仮定を利用して $P(k+1)$ を導く。
5. 以上より、すべての正整数 n について $P(n)$ が成立すると結論する。

ここで、 k は特定の数ではなく、任意に選んだ正整数である。また、帰納段階では必ず「どこで $P(k)$ の仮定を利用したか」を明らかにする必要がある。

数学的帰納法で注意すること

数学的帰納法では、論理の順番を守ることが重要である。

$P(k)$ を仮定する段階で、証明したい $P(k+1)$ をそのまま認めてはいけない。示すべきものを仮定してしまうと、証明にならない。

また、 $P(1)$ だけ、あるいは $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ だけを示しても不十分である。

数学的帰納法は、 N を固定した正整数として、基底 $P(N)$ を証明する形でも使える。この場合、任意の整数 $k \geq N$ について $P(k)$ が成立すると仮定し、その仮定から $P(k+1)$ を導く。したがって結論は、すべての整数 $n \geq N$ について $P(n)$ が成立する、となる。

例題 1

次の等式がすべての正整数 n で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

例題 1 の解答・解説

証明する命題を

$$P(n) : \sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

とする。

まず、基底として $n=1$ の場合を確認する。

$$\sum_{j=1}^1 (2j-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

一方、 $1^2 = 1$ であるから、 $P(1)$ は成立する。

次に、任意の正整数 k について $P(k)$ が成立すると仮定する。

つまり、

$$\sum_{j=1}^k (2j-1) = k^2$$

と仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$k+1$ 番目までの和は、 k 番目までの和に次の項を加えたものである。

$$\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1) = \sum_{j=1}^k (2j-1) + (2(k+1)-1)$$

ここで、帰納法の仮定

$$\sum_{j=1}^k (2j-1) = k^2$$

を使う。
すると、

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1} (2j-1) &= k^2 + (2k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

となる。

したがって、 $P(k+1)$ が成立する。

$P(1)$ が成立し、任意の正整数 k について $P(k)$ から $P(k+1)$ を導けたので、数学的帰納法により、すべての正整数 n で

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

が成立する。

例題 2

次の命題がすべての正整数 n で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

$$3^n - 1$$

は 2 の倍数である。

例題 2 の解答・解説

「 $3^n - 1$ は 2 の倍数である」という命題を $P(n)$ とする。

まず、 $n = 1$ の場合を確認する。

$$3^1 - 1 = 2 \text{ であり、2 の倍数である。}$$

よって、 $P(1)$ は成立する。

次に、任意の正整数 k について $P(k)$ が成立すると仮定する。

つまり、ある整数 m を用いて

$$3^k - 1 = 2m \text{ と表せると仮定する。}$$

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$$3^{k+1} - 1 = 3 \cdot 3^k - 1$$

$$\text{ここで、} 3 \cdot 3^k - 1 = 3(3^k - 1) + 2$$

と変形する。

帰納法の仮定 $3^k - 1 = 2m$ を使うと、

$$\begin{aligned}3^{k+1} - 1 &= 3(3^k - 1) + 2 \\ &= 3 \cdot 2m + 2 \\ &= 2(3m + 1)\end{aligned}$$

となる。

$3m + 1$ は整数であるため、 $3^{k+1} - 1$ は 2 の倍数である。

したがって、 $P(k+1)$ が成立する。
 $P(1)$ が成立し、任意の正整数 k について $P(k)$ から $P(k+1)$ を導けたので、数学的帰納法により、すべての正整数 n で $3^n - 1$ は 2 の倍数である。

例題 3

次の不等式がすべての正整数 n で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

$$2^n \geq n + 1$$

例題 3 の解答・解説

証明する命題を

$$P(n) : 2^n \geq n + 1$$

とする。

まず、 $n = 1$ の場合を確認する。

$$2^1 = 2 \text{ であり、} 1 + 1 = 2 \text{ だから、} 2^1 \geq 1 + 1$$

が成立する。

よって、 $P(1)$ は成立する。

次に、任意の正整数 k について $P(k)$ が成立すると仮定する。

$$\text{つまり、} 2^k \geq k + 1$$

と仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \text{ であるから、帰納法の仮定を使うと、} 2^{k+1} \geq 2(k+1) \text{ となる。}$$

さらに、 $2(k+1) = k+2+k$ であり、 k は正整数なので

$$2(k+1) \geq k+2 \text{ である。}$$

したがって、 $2^{k+1} \geq k+2$ となる。

$$\text{これは、} 2^{k+1} \geq (k+1) + 1$$

と同じである。

よって、 $P(k+1)$ が成立する。

$P(1)$ が成立し、任意の正整数 k について $P(k)$ から $P(k+1)$ を導けたので、数学的帰納法により、すべての正整数 n で

$$2^n \geq n + 1$$

が成立する。

演習問題**練習問題 1**

次の等式がすべての正整数 n で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

$$\sum_{j=1}^n j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

練習問題 2

次の命題がすべての正整数 n で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

$$5^n - 1$$

は 4 の倍数である。

練習問題 3

次の不等式がすべての正整数 n で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

$$3^n \geq 2n + 1$$

練習問題 4

数列 (a_n) が

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 3$$

で定められている。

この数列の一般項

$$a_n = 3n - 1$$

がすべての正整数 n で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

練習問題 5

次の命題について、数学的帰納法による証明として正しいか誤りかを判断せよ。

「 $P(1)$ が成立することを確認した。さらに、すべての正整数 k について、 $P(k+1)$ が成立すると仮定すると $P(k+2)$ が成立することを示した。したがって、すべての正整数 n で $P(n)$ が成立する。」

誤りである場合は、どの条件が不足しているか説明せよ。

練習問題 6

次の証明の誤りを指摘せよ。

「 $n^2 + n$ は 2 の倍数である」という命題を $P(n)$ とする。

「 $P(k)$ を証明するために、 $P(k)$ が成立すると仮定する。すると $P(k)$ が成立するので、すべての正整数 n について $P(n)$ が成立する。」

どこが数学的帰納法として不適切か説明せよ。

練習問題 7

次の命題を、数学的帰納法で証明せよ。

$$\sum_{j=1}^n 2j = n(n+1)$$

ただし、証明では基底、任意の k に対する仮定、 $P(k+1)$ の導出を明確に書き、帰納法の仮定を使った箇所を示せ。

練習問題 8

次の命題がすべての整数 $n \geq 4$ で成り立つことを、数学的帰納法で証明せよ。

$$2^n \geq n^2$$

ただし、帰納法では $k \geq 4$ として、 $P(k)$ を仮定し、 $P(k+1)$ を導け。

練習問題 1 の解答・解説

証明する命題を

$$P(n) : \sum_{j=1}^n j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

とする。

まず、 $n = 1$ の場合を確認する。

$$\sum_{j=1}^1 j(j+1) = 1 \cdot 2 = 2$$

右辺は

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

であるから、 $P(1)$ は成立する。

次に、任意の正整数 k について $P(k)$ が成立すると仮定する。

つまり、

$$\sum_{j=1}^k j(j+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

と仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$$\sum_{j=1}^{k+1} j(j+1) = \sum_{j=1}^k j(j+1) + (k+1)(k+2)$$

ここで、帰納法の仮定を使う。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} j(j+1) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

これは $n = k+1$ の場合の式である。

したがって、 $P(k+1)$ が成立する。

よって数学的帰納法により、すべての正整数 n で成立する。

練習問題 2 の解答・解説

「 $5^n - 1$ は 4 の倍数である」という命題を $P(n)$ とする。

$n = 1$ のとき、 $5^1 - 1 = 4$ であり、4 の倍数である。

よって $P(1)$ は成立する。

次に、任意の正整数 k について $P(k)$ が成立すると仮定する。

つまり、ある整数 m を用いて

$5^k - 1 = 4m$ と表せると仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1$ を変形すると、 $5^{k+1} - 1 = 5(5^k - 1) + 4$ となる。

ここで、帰納法の仮定 $5^k - 1 = 4m$ を使う。

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5 \cdot 4m + 4 \\ &= 4(5m + 1) \end{aligned}$$

よって $5^{k+1} - 1$ は 4 の倍数である。

したがって $P(k+1)$ が成立する。

以上より、すべての正整数 n で成立する。

練習問題 3 の解答・解説

証明する命題を

$P(n) : 3^n \geq 2n + 1$

とする。

$n = 1$ のとき、 $3^1 = 3$ であり、 $2 \cdot 1 + 1 = 3$ だから成立する。

次に、任意の正整数 k について

$3^k \geq 2k + 1$

と仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k$ であるから、帰納法の仮定を使うと、 $3^{k+1} \geq 3(2k + 1)$ となる。

さらに、 $3(2k + 1) = 6k + 3$ であり、 $6k + 3 \geq 2k + 3$

が成り立つ。

したがって、 $3^{k+1} \geq 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$ となる。

よって $P(k+1)$ が成立する。

以上より、すべての正整数 n で成立する。

練習問題 4 の解答・解説

証明する命題を

$$P(n) : a_n = 3n - 1$$

とする。

まず、 $n = 1$ の場合を確認する。

定義より、 $a_1 = 2$ である。

一方、 $3 \cdot 1 - 1 = 2$ なので $P(1)$ は成立する。

次に、任意の正整数 k について

$$a_k = 3k - 1$$

と仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

漸化式より、 $a_{k+1} = a_k + 3$ である。

ここで帰納法の仮定を使う。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (3k - 1) + 3 \\ &= 3k + 2 \\ &= 3(k + 1) - 1 \end{aligned}$$

となる。

したがって、 $a_{k+1} = 3(k+1) - 1$ であり、 $P(k+1)$ が成立する。

よって数学的帰納法により、すべての正整数 n で成立する。

練習問題 5 の解答・解説

この証明は誤りである。

数学的帰納法では、基底として $P(1)$ を示したうえで、すべての正整数 k について

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ を示す必要がある。

しかし、この証明で示しているのは、すべての正整数 k について

$$P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$$

だけである。

この条件では、 $P(1)$ から $P(2)$ へ進むことが保証されない。つまり、最初の一段階が不足している。

例えば、 $P(n)$ を「 $n \neq 2$ である」という命題とすると、 $P(1)$ は真であり、すべての正整数 k について $P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$ も成立する。

任意の正整数 k で $k+2 \geq 3$ なので $P(k+2)$ は必ず真であり、提示された条件付きの関係を満たす。

しかし、 $P(2)$

は偽である。

したがって、この条件だけではすべての正整数 n について $P(n)$ が成立するとはいえない。

$P(2)$ を追加で証明して 2 以降へ進む方法、またはすべての正整数 k について

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ を示す方法が必要である。

練習問題 6 の解答・解説

この証明は数学的帰納法になっていない。

数学的帰納法では、任意の正整数 k について $P(k)$ が成立すると仮定し、その仮定を使って $P(k+1)$ を導く必要がある。

しかし、この証明で示しているのは、 $P(k) \Rightarrow P(k)$

という同じ内容の確認だけである。

これは条件付き仮定そのものが誤りという意味ではない。数学的帰納法でも、帰納段階では $P(k)$ を仮定してよい。

問題は、その仮定から新しい段階である $P(k+1)$ を導いておらず、さらに基底 $P(1)$ も証明していないことである。

したがって、この論証からすべての正整数 n について $P(n)$ が成立するという結論は得られない。

練習問題 7 の解答・解説

証明する命題を

$$P(n) : \sum_{j=1}^n 2j = n(n+1)$$

とする。

$n=1$ のとき、

$$\sum_{j=1}^1 2j = 2$$

であり、 $1(1+1)=2$ なので $P(1)$ は成立する。

次に、任意の正整数 k について

$$\sum_{j=1}^k 2j = k(k+1)$$

と仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$$\sum_{j=1}^{k+1} 2j = \sum_{j=1}^k 2j + 2(k+1)$$

ここで帰納法の仮定を使う。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} 2j &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

これは $n=k+1$ の式である。

よって $P(k+1)$ が成立する。

以上より、すべての正整数 n で成立する。

練習問題 8 の解答・解説

証明する命題を

$$P(n) : 2^n \geq n^2$$

とする。

まず、基底として $n = 4$ の場合を確認する。

$2^4 = 16$ であり、 $4^2 = 16$ だから、 $2^4 \geq 4^2$

が成立する。

よって、 $P(4)$ は成立する。

次に、任意の整数 $k \geq 4$ について $P(k)$ が成立すると仮定する。

つまり、 $2^k \geq k^2$

と仮定する。

この仮定を使って $P(k+1)$ を示す。

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ であるから、帰納法の仮定を使うと、 $2^{k+1} \geq 2k^2$ となる。

ここで、 $2k^2 - (k+1)^2$ を考える。

$$\begin{aligned} 2k^2 - (k+1)^2 &= 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) \\ &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

である。

$k \geq 4$ だから、 $(k-1)^2 - 2 \geq 3^2 - 2 = 7 > 0$ となる。

したがって、 $2k^2 > (k+1)^2$ であり、 $2^{k+1} \geq (k+1)^2$

が成立する。

よって、 $P(k+1)$ が成立する。

以上より、 $P(4)$ が成立し、任意の整数 $k \geq 4$ について $P(k)$ から $P(k+1)$ を導けたので、数学的帰納法により、すべての整数 $n \geq 4$ で

$2^n \geq n^2$

が成立する。