

第 159 講 連続型確率変数

学習目標

確率密度関数をグラフとして捉え、連続型確率変数の区間確率を面積で求められるようになる。
具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 確率密度関数が満たす条件を説明できる。
- ・ $P(a \leq X \leq b)$ を確率密度関数の下側の面積として求められる。
- ・ 1 点の確率が 0 になる理由を説明できる。
- ・ 密度の高さと確率そのものを区別できる。

連続型の確率を面積で考える理由

連続型確率変数では、ある範囲に入る確率を面積で考える。

ここでは、例えば架空の測定モデルとして「ある量 X が連続的な値をとる」と考える。実際の測定では、記録された値が小数点以下を丸めた値であることもある。例えば、測定結果を 170 と記録しても、もとの量が正確に 170 であるとは限らない。このような実測値の記録と、数学上で連続的な量として扱うモデルは区別する必要がある。

これまで扱った有限個の値をとる離散型確率変数では、値ごとの確率を考え、その和で確率を求める方法を使う。しかし、連続型確率変数では、値を 1 つずつ並べて有限個の確率を足すのではなく、確率密度関数のグラフと x 軸の間の面積によって区間の確率を表す。

なお、連続型確率変数でも $P(X = c) = 0$ という確率は定まる。これは「 $X = c$ が起こらない」という意味ではない。確率 0 という情報だけから、その値が論理的に起こりえないとは結論できない。1 点だけでは面積がなく、その点に対応する確率が 0 になるという意味である。

確率密度関数

今回は、ある有限区間 $[A, B]$ の外で 0 となる確率密度関数を扱う。
ただし、

$$A < B$$

とする。

確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると、次の条件を満たす。
すべての x について、

$$f(x) \geq 0$$

である。

また、全体の面積が 1 になる。

$$\int_A^B f(x) dx = 1$$

さらに、 $a \leq b$ のとき、区間 $a \leq X \leq b$ の確率は、グラフと x 軸の間の面積で表される。

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

したがって、連続型確率変数では、確率は確率密度関数の高さではなく、区間に対応する面積で決まる。

連続型確率変数で重要な見方

連続型確率変数では、密度の高さと確率を混同しないことが重要である。

1 点 $x = c$ における $f(c)$ は、その場所での密度を表す値であり、

$$P(X = c)$$

そのものではない。

例えば、ある 1 点の密度の値を大きく変更しても、その点は幅をもたないため、区間の面積は変化しない。

一定の密度が続く区間では、確率は区間の幅と密度の高さの積で求められる。

また、密度がそれぞれ一定で、同じ正の幅をもつ 2 区間を比べる場合は、高い密度をもつ区間の方が面積が大きい。

ただし、1 点の密度値と、その点の確率は別のものである。

また、1 点の確率は、

$$P(X = c) = 0$$

となる。そのため、区間の端点を含むかどうかは確率を変えない。

さらに、密度の高さは 1 を超えてもよい。確率は高さではなく面積で決まるためである。

面積として確率を求める流れ

連続型確率変数の問題では、次の順序で考える。

1. 確率密度関数のグラフの形を確認する。
2. 求める区間をグラフ上で確認する。
3. その区間の下側面積を求める。

この段階では、一般の広義積分や正規分布は扱わず、有限区間での定数や一次式の面積計算に限定する。

例題 1

$0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = \frac{1}{2}$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。

この $f(x)$ が確率密度関数であることを確認し、次を求めよ。

- (1) $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$
- (2) $P(X = 1)$

例題 1 の解答・解説

確率密度関数になるためには、グラフの下側全体の面積が 1 である必要がある。

$0 \leq x \leq 2$ では高さが $\frac{1}{2}$ の長方形になるので、全体の面積は

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

となる。

また、 $f(x)$ は常に 0 以上なので、確率密度関数の条件を満たす。

(1)
求める確率は、 $x = \frac{1}{2}$ から $x = \frac{3}{2}$ までの面積である。

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

したがって、

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

である。

(2)

1点だけでは幅がないため、対応する面積は0になる。

したがって、

$$P(X = 1) = 0$$

である。

密度関数のグラフでは、 $x = 1$ における高さ $\frac{1}{2}$ は確率ではなく、その場所での密度を表している。

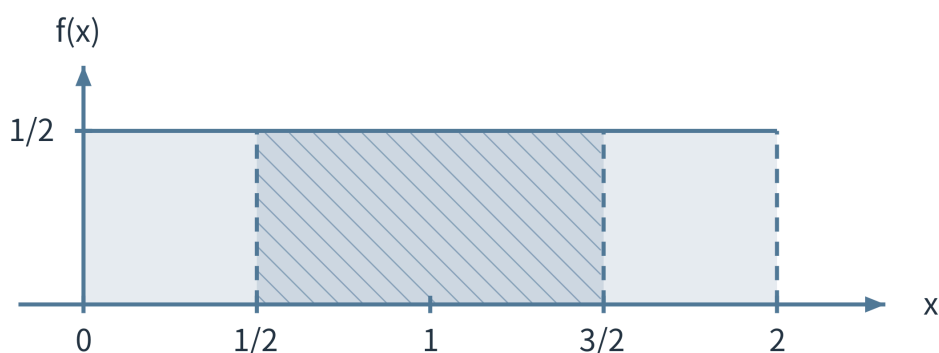


図1 $0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = \frac{1}{2}$ 、範囲外では0である。全体の面積は1、斜線部の $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ に対応する面積は $\frac{1}{2}$ である。確率は区間での面積から読み、密度の高さを1点の確率としない。端点での密度の値は確率に影響しない。

例題 2

$0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = cx$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。

$f(x)$ が確率密度関数となるような定数 c を求め、さらに

$$P(0 \leq X \leq 1)$$

を求めよ。

例題 2 の解答・解説

確率密度関数では、全体の面積が1になる必要がある。

また、 $0 \leq x \leq 2$ では $x \geq 0$ なので、 c が正なら $f(x) \geq 0$ となる。

まず、面積条件を使う。

$$\int_0^2 cx \, dx = 1$$

積分すると、

$$c \int_0^2 x \, dx = 1$$

$$c \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1$$

$$2c = 1$$

したがって、

$$c = \frac{1}{2}$$

である。

この値では $f(x) = \frac{1}{2}x$ となり、非負条件も満たす。

次に、

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}x \, dx$$

である。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2}x \, dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

したがって、

$$P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{4}$$

である。

この問題では、一次関数のグラフの下側面積を確率として読むことが重要である。

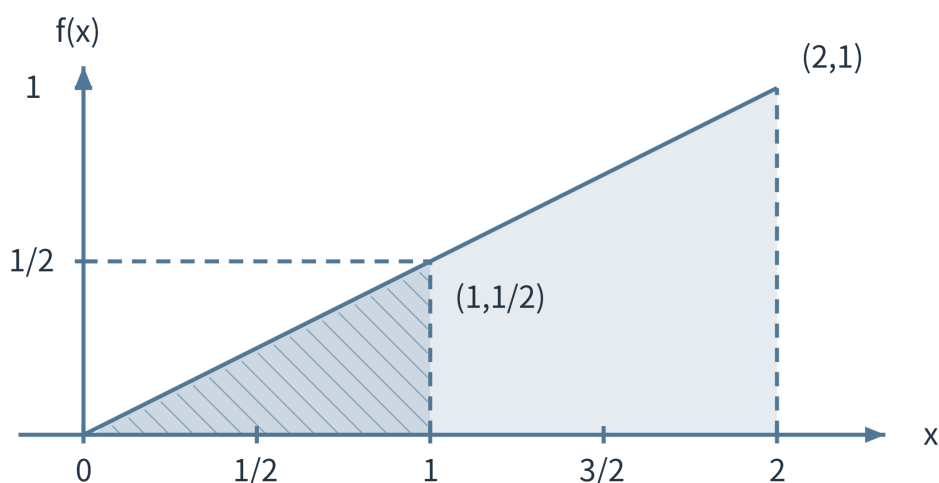


図2 $0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = \frac{x}{2}$ 、範囲外では 0 である。三角形全体の面積は 1、斜線部の $0 \leq x \leq 1$ に対応する面積は $\frac{1}{4}$ である。図中の座標は密度曲線上の位置を示し、1 点に確率の質量を置くものではない。

例題 3

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ で $f(x) = 2$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。

次を求めよ。

(1) $f(x)$ が確率密度関数であることを確認せよ。

(2) $P(0 \leq X \leq \frac{1}{4})$

(3) $P(X = \frac{1}{4})$

また、密度の高さが 2 であることの意味を説明せよ。

例題 3 の解答・解説

(1)
 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ の面積を考える。

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1$$

となる。

また、 $f(x) = 2$ は 0 以上なので、確率密度関数の条件を満たす。

(2)

区間 $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ の面積を求める。

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \times 2$$

したがって、

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

である。

(3)
1点だけでは幅がないため、面積は0である。
したがって、

$$P\left(X = \frac{1}{4}\right) = 0$$

である。
ここで注意すべきなのは、高さ2は確率2を意味しないことである。
確率は高さではなく面積で決まり、この場合も全体の面積は1になっている。

演習問題

練習問題 1

$0 \leq x \leq 4$ で $f(x) = \frac{1}{4}$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。
確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとして、次を求めよ。
(1) $f(x)$ が確率密度関数であることを確認せよ。
(2) $P(1 \leq X \leq 3)$ を求めよ。
(3) $P(X = 2)$ を求めよ。

練習問題 1 の解答・解説

(1)
 $0 \leq x \leq 4$ では高さ $\frac{1}{4}$ の長方形になる。
全体の面積は、

$$4 \times \frac{1}{4} = 1$$

である。
また、 $f(x)$ は0以上なので、確率密度関数の条件を満たす。

(2)
 $1 \leq X \leq 3$ の確率は、その区間の面積で求める。

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \frac{1}{4} dx$$

これは幅2、高さ $\frac{1}{4}$ の長方形の面積なので、

$$P(1 \leq X \leq 3) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

である。
(3)
1点だけでは幅がないため、その部分の面積は0である。
したがって、

$$P(X = 2) = 0$$

である。
これは「 $X = 2$ が起こらない」という意味ではなく、連続型では1つの値だけに対応する面積がないことを意味する。

練習問題 2

$0 \leq x \leq 3$ で $f(x) = \frac{x}{3}$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。

この $f(x)$ が確率変数 X の確率密度関数となるか判定せよ。

また、仮に区間 $0 \leq x \leq 2$ の面積を計算した場合、その値を $P(0 \leq X \leq 2)$ と解釈できるか説明せよ。

練習問題 2 の解答・解説

まず、非負条件を確認する。

$0 \leq x \leq 3$ では、

$$\frac{x}{3} \geq 0$$

なので、非負条件は満たす。

次に、全体の面積を確認する。

$$\int_0^3 \frac{x}{3} dx$$

を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 &= \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

総面積が 1 ではないため、この $f(x)$ は確率密度関数ではない。

次に、区間 $0 \leq x \leq 2$ の面積だけを計算すると、

$$\int_0^2 \frac{x}{3} dx$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 &= \frac{1}{3} \times 2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

しかし、この $f(x)$ は確率密度関数ではないため、存在する確率変数 X に対する

$$P(0 \leq X \leq 2)$$

として解釈することはできない。

面積計算の結果が得られても、先に確率密度関数の条件を確認する必要がある。

練習問題 3

$0 \leq x < 1$ で $f(x) = -1$ 、 $1 \leq x \leq 2$ で $f(x) = 2$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。
この $f(x)$ が確率密度関数となるか判定せよ。

練習問題 3 の解答・解説

まず、確率密度関数ではすべての x で

$$f(x) \geq 0$$

である必要がある。

しかし、

$$0 \leq x < 1$$

では、

$$f(x) = -1$$

となり、負の値をとる。

したがって、この時点で確率密度関数ではない。

なお、符号付きの定積分だけを見ると、

$$\int_0^2 f(x) dx$$

は、

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-1) dx + \int_1^2 2 dx &= -1 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

しかし、確率密度関数で必要なのは符号付きの面積が 1 になることだけではない。

グラフと x 軸の間の面積として確率を表すためには、密度が常に非負である必要がある。

練習問題 4

$0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = \frac{1}{2}x$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとして、次を求めよ。

- (1) $P(0 \leq X \leq 1)$
- (2) $P(1 < X \leq 2)$
- (3) $P(X = 1)$

練習問題 4 の解答・解説

まず、確率密度関数であることを確認する。

$$\int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1$$

また、 $f(x) \geq 0$ なので確率密度関数である。

(1)

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx$$

よって、

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

したがって、

$$P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{4}$$

である。

(2)

$$P(1 < X \leq 2) = \int_1^2 \frac{x}{2} dx$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 &= \frac{1}{4}(4 - 1) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。

(3)

1点だけの確率は0である。

したがって、

$$P(X = 1) = 0$$

である。

また、端点を含むかどうかは1点分の面積しか変えないため、

$$P(1 < X \leq 2) = P(1 \leq X \leq 2)$$

である。

練習問題 5

$1 \leq x \leq 3$ で $f(x) = \frac{1}{2}$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。
確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとして、次を求めよ。

(1) $P(-1 \leq X \leq 1)$ (2) $P(3 \leq X \leq 5)$

(3) 範囲外での確率が0になる理由を説明せよ。

練習問題 5 の解答・解説

$1 \leq x \leq 3$ で $f(x) = \frac{1}{2}$ 、それ以外では $f(x) = 0$ である。

(1)

区間 $-1 \leq x \leq 1$ には、端点 $x = 1$ が含まれる。

しかし、端点の 1 点だけでは幅がなく、面積には影響しない。

したがって、

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0$$

である。

(2)

区間 $3 \leq x \leq 5$ には、端点 $x = 3$ が含まれる。

この場合も、1 点だけの面積は 0 である。

したがって、

$$P(3 \leq X \leq 5) = 0$$

である。

(3) 範囲外では密度が 0 であり、端点の単独の密度値があっても確率には影響しない。

連続型確率変数では、端点を含むかどうかではなく、区間全体の面積を見ることが重要である。

練習問題 6

$-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ で $f(x) = 2$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとして、次を求めよ。

(1) $f(x)$ が確率密度関数であることを確認せよ。

(2) $P(-\frac{1}{8} \leq X \leq \frac{1}{8})$

(3) $P(X = 0)$

(4) $f(0) = 2$ が確率 2 を意味しない理由を説明せよ。

練習問題 6 の解答・解説

(1)

区間の幅は、

$$\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

である。

高さは 2 なので、全体の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1$$

となる。

この区間では $f(x) = 2$ 、それ以外では $f(x) = 0$ である。したがって、すべての x について $f(x) \geq 0$ が成り立ち、非負条件を満たす。

(2)

求める確率は区間

$$-\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{8}$$

の面積である。

区間の幅は、

$$\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

なので、

$$P\left(-\frac{1}{8} \leq X \leq \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

である。

(3)

1点だけの面積は0である。

したがって、

$$P(X = 0) = 0$$

である。

(4)

$f(0) = 2$ は、この例では0付近での一定密度の高さを表している。確率を求めるときは、対象となる区間が $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ の中に収まる場合、その区間の幅と密度2の積で面積を求める。

ただし、 $f(0) = 2$ そのものは1点での密度の値であり、 $P(X = 0)$ という1点の確率とは異なる。1点だけの確率は0である。

練習問題 7

$0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = c$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。
確率変数 X の確率密度関数となるような定数 c を求めよ。
また、 $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ を求めよ。

練習問題 7 の解答・解説

定数関数なので、グラフは高さ c の長方形になる。

確率密度関数では全体の面積が1である。

したがって、

$$\int_0^2 c \, dx = 1$$

より、

$$2c = 1$$

となる。

したがって、

$$c = \frac{1}{2}$$

である。

この値なら、指定区間内では密度が $\frac{1}{2}$ 、範囲外では0となるため、すべての x で非負条件も満たす。
次に、

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \, dx$$

である。

区間の幅は 1 なので、

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

となる。

練習問題 8

$0 \leq x \leq 2$ で $f(x) = \frac{x}{2}$ 、それ以外では $f(x) = 0$ とする。

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとして、次を求めよ。

(1) $f(0)$ の値を変更して $f(0) = 5$ としても確率が変わらない理由を説明せよ。

(2) $P(0 \leq X \leq 1)$ を求めよ。

練習問題 8 の解答・解説

まず、元の関数が確率密度関数であることを確認する。

$$\int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1$$

であり、 $f(x) \geq 0$ なので確率密度関数である。

(1) $f(0)$ の 1 点だけを 5 に変更しても、面積は変化しない。

連続型確率変数では、1 点だけの部分の幅は 0 であり、その面積への影響はない。

ただし、端点の値を変更してもよいのは、確率密度関数として必要な条件を保つ範囲である。

(2)

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx$$

したがって、

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

である。

このように、連続型確率変数では個々の点の高さではなく、区間全体の面積が確率を決める。