

第 129 講 関数の増減

学習目標

この講では、関数の増加・減少を区間ごとに判断する方法を学ぶ。

教材終了後には、次のことができるようになる。

- ・ 関数がある区間で増加・減少することの意味を、2つの点の大小関係で説明できる。
- ・ 導関数の符号から、関数の増減を調べることができる。
- ・ 導関数が 0 になる点を増減の境界候補として調べ、増減表に整理できる。
- ・ 導関数が 0 でも必ず増減が変わるわけではないことを理解し、適切に判断できる。

関数の変化を見る視点

関数のグラフを見るとき、重要なのは「どちらへ進むと値が大きくなるか」である。

例えば、 x が大きくなるにつれて y も大きくなるなら、その関数は増加しているという。逆に、 x が大きくなるにつれて y が小さくなるなら減少しているという。

ただし、ある 1 点での傾きだけを見て、関数全体の変化を決めることはできない。区間全体で傾きがどのようになっているかを調べる必要がある。

微分は、この「その点での変化の向き」を調べる道具である。導関数 $f'(x)$ の符号を見ることで、関数が増加する区間、減少する区間を判断できる。

増加・減少の定義

関数 $f(x)$ が区間で増加するとは、その区間の任意の 2 点 x_1, x_2 について、 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つことである。

同様に、関数 $f(x)$ が区間で減少するとは、 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことである。つまり、増加・減少はグラフの見た目だけではなく、区間内のすべての点の大小関係によって決まる。

導関数の符号と増減

多項式関数の増減を調べるときは、導関数が区間全体でどのような符号を持つかを確認する。

ある区間の内部で常に $f'(x) > 0$ ならば、その区間で $f(x)$ は増加する。

ある区間の内部で常に $f'(x) < 0$ ならば、その区間で $f(x)$ は減少する。

増減を調べる基本手順は次の通りである。

1. 導関数 $f'(x)$ を求める。
2. $f'(x) = 0$ となる点を求める。
3. その点を境界として区間を分ける。
4. 各区間内部で $f'(x)$ の符号を確認する。
5. 符号から増減を判断する。

ただし、導関数が恒等的に 0 になる場合は別扱いである。多項式で $f'(x) = 0$ がすべての x で成り立つならば、元の関数は定数関数であり、有限個の零点を境界として区切る方法は使わない。

また、導関数が零点を持たず、全実数で常に正または常に負の場合は、零点を探す必要はない。

導関数全体の符号から、そのまま増加または減少を判断する。

なお、 $f'(x) \geq 0$ だからといって、一般に厳密増加であるとは限らない。定数関数のように、導関数が 0 以上でも値が変化しない場合があるためである。

導関数 0 の点についての注意

$f'(a) = 0$ だからといって、必ずその前後で増加と減少が入れ替わるわけではない。

例えば $f(x) = x^3$ では、 $f'(0) = 0$ である。しかし、関数は全実数で増加している。

また、 $f'(x) \geq 0$ だけでは一般に厳密な増加を断定できない。定数関数 $f(x) = 1$ では $f'(x) = 0$ であるが、 $x_1 < x_2$ に対して $f(x_1) < f(x_2)$ は成り立たない。

したがって、増加・減少を判断するときは、導関数の符号と区間全体の変化を確認する必要がある。

増減表を作る理由

導関数の符号と関数の変化を対応させるために、増減表を用いる。

増減表では、次の順序で整理する。

- ・ 増減が変化する候補となる点を書く。
- ・ 各区間で導関数の符号を書く。
- ・ その符号から関数の増減を書く。

導関数の零点、符号、関数の増減を並べることで、グラフ全体の変化を見落とさずに判断できる。

区間の端点について

増減を調べるときは、まず区間の内部で導関数の符号を確認する。

例えば区間 $[a, b]$ で増減を考える場合、内部とは开区間 (a, b) 、つまり $a < x < b$ を表す。このとき端点 a, b は定義域から除外されるという意味ではなく、内部での変化を調べるために分けて考えている。

一方、導関数が 0 になる点 c を境界として区間を分ける場合は、 $x < c$ と $x > c$ はそれぞれ c の左右の开区間を表す。この場合も、点 c そのものが関数の定義域から除外されるという意味ではない。有限の端点や境界の点を含めた増減は、連続性を踏まえて最後に判断する。

多項式関数は連続であるため、内部で増加または減少していることが分かれば、有限の端点を含めた区間でもその増減の関係を保つことができる。

したがって、有限端点を含む区間では、开区間での導関数の符号判定と、端点を含めた最終的な増減の記述を分けて考える。

なお、 $-\infty$ や ∞ は代入する値ではない。無限区間では、その範囲内で関数がどのように変化するかを調べる。

例題 1

関数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ の増減を調べよ。

例題 1 の解答・解説

まず、増減を調べるために導関数を求める。

$f'(x) = 2x - 4$ である。

導関数が 0 になる点を求める。

$2x - 4 = 0$ より、 $x = 2$ である。

この点を境界として、区間を分ける。

$x < 2$ では $f'(x) < 0$ 、 $x > 2$ では $f'(x) > 0$ となる。

したがって、 $x < 2$ では減少し、 $x > 2$ では増加する。

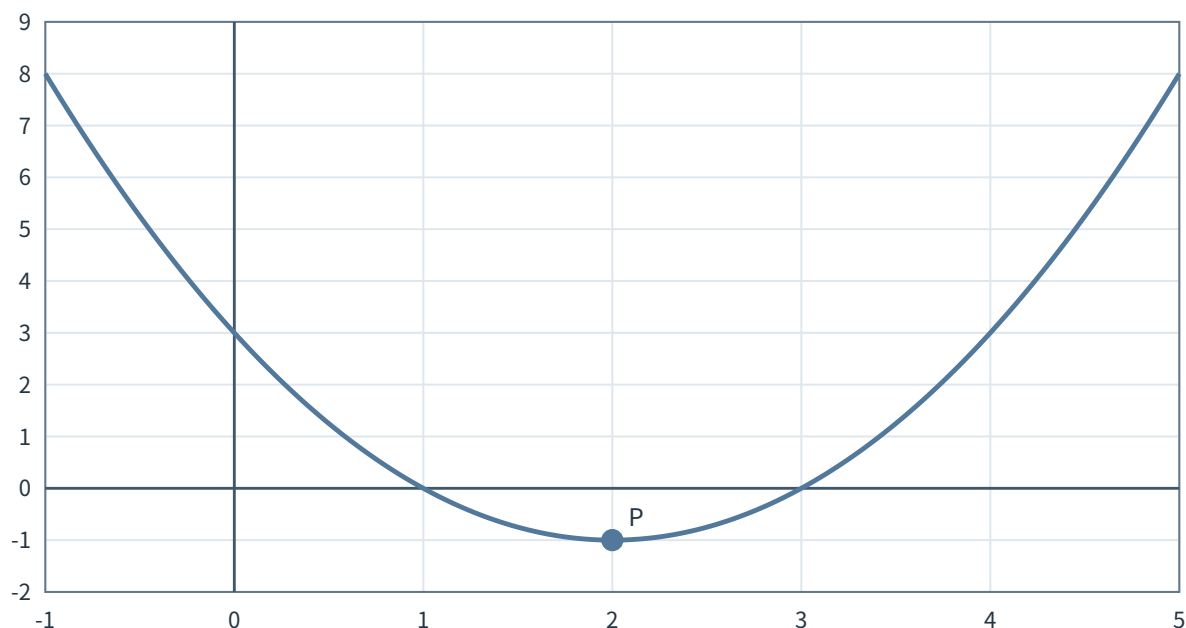


図1 $y = x^2 - 4x + 3$ 。点 $P(2, -1)$ を通り、 $x = 2$ の前後で増減が変わる。

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗

図2 $f'(x) = 2x - 4$ の符号と $f(x)$ の増減。 $x < 2$ で減少し、 $x > 2$ で増加する。

グラフ上の点 $(2, -1)$ は関数値として確認できる。ここは増減を分けて調べる境界である。よって、 $f(x)$ は $x < 2$ で減少し、 $x > 2$ で増加する。

例題 2

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べよ。

例題 2 の解答・解説

導関数を求める。

$f'(x) = 3x^2 - 3$ である。

因数分解すると、 $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$ となる。

導関数が 0 になる点は $x = -1, 1$ である。

この 2 点で区間を分ける。

$(-\infty, -1)$ では $f'(x) > 0$ 、 $(-1, 1)$ では $f'(x) < 0$ 、 $(1, \infty)$ では $f'(x) > 0$ となる。

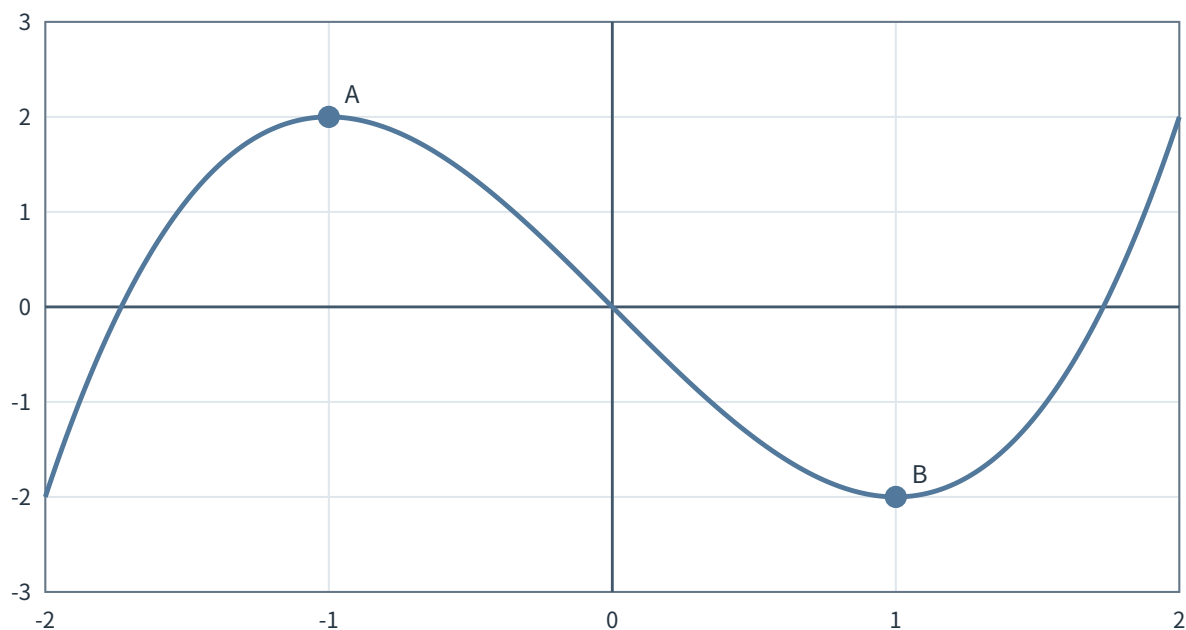


図3 $y = x^3 - 3x$ 。点 $A(-1, 2)$ と点 $B(1, -2)$ を通る。

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

図4 $f'(x) = 3x^2 - 3$ の符号と $f(x)$ の増減。増加、減少、増加の順に変わる。

したがって、 $x < -1$ では増加し、 $-1 < x < 1$ では減少し、 $x > 1$ では増加する。点 $(-1, 2)$ 、 $(1, -2)$ はそれぞれ関数値を確認するための代表点である。

例題 3

関数 $f(x) = x^3$ の増減を調べよ。また、 $f'(0) = 0$ であるが全実数で増加する理由を説明せよ。

例題 3 の解答・解説

導関数を求める。

$f'(x) = 3x^2$ である。

$f'(x)$ は常に 0 以上であり、 $x = 0$ でだけ 0 になる。

しかし、 $f'(0) = 0$ だけを見て増減が変わると判断してはいけない。

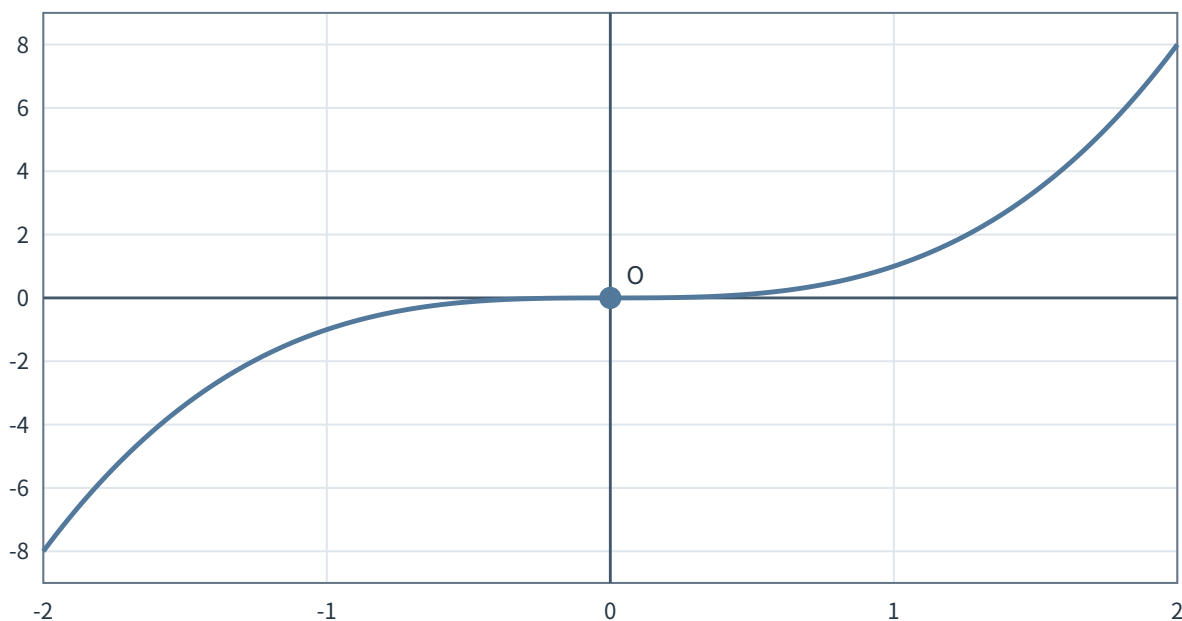


図5 $y = x^3$ 。点 $O(0,0)$ で接線の傾きは 0 になるが、前後とも増加する。

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

図6 $f'(x) = 3x^2$ は $x = 0$ のときだけ 0。 $f(x) = x^3$ は実数全体で単調増加する ($a < b$ なら $a^3 < b^3$)。

0をまたぐ場合でも、任意の $a < b$ について大小関係を確認できる。

$$b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$$

ここで、 $a < b$ より $b - a > 0$ である。また、 $a^2 + ab + b^2$ については、次のように計算する。

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{(a + b)^2 + a^2 + b^2}{2}$$

と変形できる。

右辺は平方の和であるため、 $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ である。

さらに、等号が成り立つのは $(a + b)^2 = 0$ 、 $a^2 = 0$ 、 $b^2 = 0$ がすべて成り立つとき、つまり $a = b = 0$ のときだけである。

しかし $a < b$ では a と b が同時に 0 になることはない。

したがって、 $a < b$ ならば $a^2 + ab + b^2 > 0$ である。

したがって、 $b^3 - a^3 > 0$ となり、 $b^3 > a^3$ である。

よって、 $a < b$ ならば $f(a) < f(b)$ が成り立つため、 $f(x) = x^3$ は全実数で増加する。

点 $(0,0)$ では導関数が 0 になるが、増加の性質は失われていない。

練習問題 1

関数 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ の増減を調べよ。

練習問題 2

関数 $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ の増減を調べよ。

練習問題 3

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の増減を調べよ。

練習問題 4

関数 $f(x) = x^3 + x$ の増減を調べよ。

練習問題 5

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ の増減を調べよ。
ただし、導関数が 0 になる点で増減が変化するかどうかを確認すること。

練習問題 6

関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ を区間 $[0, 3]$ に制限したときの増減を調べよ。

練習問題 7

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ について、 $x = 0$ で $f'(0) = -3$ であることから、関数全体の増減を判断する誤りを説明し、正しい増減を調べよ。

練習問題 8

関数 $f(x) = 5$ の増減を調べよ。
また、導関数が常に 0 以上であることから、この関数が厳密に増加すると判断できない理由を説明せよ。

練習問題 1 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 2x - 6 \text{ である。}$$

増減の境界を調べるため、導関数が 0 になる点を求める。

$$2x - 6 = 0 \text{ より、} x = 3 \text{ である。}$$

$x < 3$ では $f'(x) < 0$ 、 $x > 3$ では $f'(x) > 0$ となる。

したがって、 $x < 3$ では減少し、 $x > 3$ では増加する。

増減を判断するときは、 $x = 3$ の一点の符号ではなく、その左右の区間全体の符号を確認する必要がある。

練習問題 2 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = -2x + 4 \text{ である。}$$

導関数が 0 になる点は、 $-2x + 4 = 0$ より $x = 2$ である。

$x < 2$ では $f'(x) > 0$ 、 $x > 2$ では $f'(x) < 0$ となる。

したがって、 $x < 2$ では増加し、 $x > 2$ では減少する。

この式では x^2 の係数が負であるため、導関数 $f'(x) = -2(x - 2)$ の符号は $x - 2$ と逆になる。

練習問題 3 の解答・解説

導関数を求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

導関数が 0 になる点は $x = 1, 3$ である。

区間ごとの符号を調べる。

$x < 1$ では $(x - 1) < 0$ 、 $(x - 3) < 0$ であるため、 $f'(x) > 0$ となる。

$1 < x < 3$ では $(x - 1) > 0$ 、 $(x - 3) < 0$ であるため、 $f'(x) < 0$ となる。

$x > 3$ では $(x - 1) > 0$ 、 $(x - 3) > 0$ であるため、 $f'(x) > 0$ となる。

したがって、 $x < 1$ では増加し、 $1 < x < 3$ では減少し、 $x > 3$ では増加する。

零点 $x = 1, 3$ は増減を調べる境界であり、符号確認によって増減が決まる。

練習問題 4 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \text{ である。}$$

$$x^2 \geq 0 \text{ より、} 3x^2 + 1 > 0 \text{ である。}$$

したがって、すべての実数 x で $f'(x) > 0$ となる。

よって、 $f(x) = x^3 + x$ は全実数で増加する。

導関数が常に正の場合は、区間を分ける零点を探す必要がなく、そのまま増加を判断できる。

練習問題 5 の解答・解説

導関数を求める。

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\&= 3(x-1)^2\end{aligned}$$

導関数が 0 になる点は $x=1$ である。

しかし、 $3(x-1)^2$ は $x=1$ 以外では正であり、左右の区間で符号は変化しない。

したがって、 $x < 1$ でも $x > 1$ でも導関数は正であり、増加する。

ここで、零点 $x=1$ をまたいだ全体の増加を確認する。

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x \\&= (x-1)^3 + 1\end{aligned}$$

任意の $a < b$ について、 $a-1 < b-1$ である。

例題 3 で確認したように、三乗関数は厳密に増加するため、 $(a-1)^3 < (b-1)^3$ となる。

したがって、 $f(a) < f(b)$ が成り立ち、 $f(x)$ は全実数で増加する。

導関数の零点 $x=1$ は増減が変化する点ではなく、増加の途中に現れる点である。また、定数関数とは異なり、値は区間全体で変化している。

練習問題 6 の解答・解説

導関数を求める。

$f'(x) = 2x - 2$ である。

導関数が 0 になる点は、 $2x - 2 = 0$ より $x = 1$ である。

区間 $[0, 3]$ の内部 $(0, 3)$ で符号を調べる。

$0 < x < 1$ では $f'(x) < 0$ 、 $1 < x < 3$ では $f'(x) > 0$ となる。

したがって、开区間では $0 < x < 1$ で減少し、 $1 < x < 3$ で増加する。

多項式関数は連続であるため、端点を含めると、 $[0, 1]$ で減少し、 $[1, 3]$ で増加する。

区間の端点を含める場合は、内部での増減判定と端点での値の扱いを分けて考える。

練習問題 7 の解答・解説

$f'(0) = -3$ だけを見て、関数全体が減少すると判断することは誤りである。

導関数を求める。

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 3 \\&= 3(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

導関数が 0 になる点は $x = -1, 1$ である。

符号を調べる。

$x < -1$ では $f'(x) > 0$ 、 $-1 < x < 1$ では $f'(x) < 0$ 、 $x > 1$ では $f'(x) > 0$ となる。

したがって、 $x < -1$ では増加し、 $-1 < x < 1$ では減少し、 $x > 1$ では増加する。

一点 $x=0$ での導関数の符号は、その点の近くでの変化を表すだけであり、全区間の増減を決めるものではない。

練習問題 8 の解答・解説

$f(x) = 5$ は定数関数である。

導関数は、 $f'(x) = 0$ である。

したがって、 $f'(x) \geq 0$ は成り立つ。

しかし、任意の $x_1 < x_2$ について、 $f(x_1) = 5$ 、 $f(x_2) = 5$ であり、 $f(x_1) < f(x_2)$ とはならない。

$f(x_1) = f(x_2) = 5$ であるため、 $x_1 < x_2$ でも $f(x_1) < f(x_2)$ は成り立たない。

この講で定義した厳密な増加の条件を満たさないため、この関数は増加ではない。

同様に $f(x_1) > f(x_2)$ も成り立たないため、減少でもない。

つまり、この関数は一定である。

導関数が非負であることだけから、厳密増加を一般に断定することはできない。