

第138講 数列と一般項

この講でできるようになること

- ・ 数列を「番号と値の対応」として捉え、項と項の番号を区別できる。
- ・ 一般項 a_n が表す意味を理解し、番号から項の値を求められる。
- ・ 規則から一般項を作り、一般項から必要な項を求められる。

数列は番号と値の対応で考える

数が並んでいるだけに見えるものでも、数学では「どの順番の値なのか」を区別する。

例えば、最初を1とし、2ずつ増やして続ける数列を考える。

第 n 項は、なぜ $2n-1$?

最初は1個。毎回2個ずつ増やす。

① 増え方を見る



② 第4項を分けてみる



第 n 項までに増やす回数は $n-1$ 回

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

図1. 最初の1個に2個ずつ追加する。第 n 項までの追加は $n-1$ 回である。

この数列では、第1項の値は1、第2項の値は3、第3項の値は5、第4項の値は7である。

ここで注意したいのは、項の番号と項の値を区別することである。 $n=3$ は「第3項を表す番号が3である」という指定であり、項の値そのものではない。一方、 a_3 は第3項の値を表す記号であり、 $a_3=5$ は「第3項の値が5である」という等式である。つまり、 n は項を指定するための番号、 a_3 はその番号に対応する値を表している。

数列では、項の番号 n に対して項の値 a_n を対応させて表す。このように、どの番号の項でも値を求められる式を一般項という。

本講では特記しない限り、数列は無限数列として扱う。無限数列とは項が無限に続く数列であり、決められた個数だけで終わる数列は有限数列という。

数列と一般項の定義

数を順番に並べたものを数列という。

数列の各数を項といい、最初から順に第1項、第2項、第3項、…と呼ぶ。

項の番号を n 、第 n 項の値を a_n と書く。このとき、 n は1から始まる正の整数である。

一般項とは、項の番号 n を使って第 n 項の値 a_n を表す式である。

例えば、 $a_n = n^2 + 1$ と定めれば、 n に1, 2, 3, …を代入することで各項の値が決まる。

一般項を作る理由

項をいくつか並べるだけでは、その先の項を確定できない場合がある。

例えば、1, 3, 5, 7, … という並びを見ると、「2ずつ増える」と考えることができる。しかし、4項だけから必ずこの規則になるとは限らない。数列の規則を指定したうえで、その規則を式で表すことが大切である。

この数列を「最初を1とし、2ずつ増やして続ける」と定める。

第1項は1であり、第2項は1に2を1回加えた値、第3項は1に2を2回加えた値になる。したがって、第 n 項では2を $n-1$ 回加えることになる。

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + 2(n-1) \\ &= 2n - 1\end{aligned}$$

このように、番号 n と値 a_n の関係を式にすると、どの項でも直接求められる。

項を考えたときの見方

数列では、次の2つを混同しないことが重要である。

表記	意味
n	項の番号
a_n	第 n 項の値
a_3	第3項の値

数列では順序が重要であり、同じ値が複数回現れることもある。また、負の数や分数も項になり得る。

番号と値を混同しない

3という数字が出てきたとき、それが項の番号なのか項の値なのかを確認する。

例えば、第3項の値が5である場合、 $n=3$ と $a_3=5$ は異なる情報を表している。

例題 1

数列の一般項が $a_n = n^2 + 1$ で表されるとき、初めの4項と第10項を求めよ。

例題 1 の解答・解説

一般項の n に項の番号を代入する。

第1項から第4項は、 $n=1, 2, 3, 4$ を代入する。

$a_1 = 1^2 + 1 = 2$ 、 $a_2 = 2^2 + 1 = 5$ 、 $a_3 = 3^2 + 1 = 10$ 、 $a_4 = 4^2 + 1 = 17$ である。

したがって、初めの4項は2, 5, 10, 17である。

第10項は $n=10$ を代入する。

$a_{10} = 10^2 + 1 = 101$ である。

一般項が分かっている場合は、求めたい項の番号を代入すればよい。

例題 2

数列の一般項が $a_n = 3n - 2$ で表される。この数列に22と21が項として現れるか調べよ。

例題 2 の解答・解説

値が項として現れるかを調べるには、その値になる番号 n が本講で扱う正の整数になるかを確認する。

まず、22が現れるかを調べる。

$a_n = 22$ とおくと、 $3n - 2 = 22$ である。

両辺に2を加えると、 $3n = 24$ となる。

したがって、 $n = 8$ である。

$n = 8$ は正の整数であるため、22は項として現れる。

実際に、 $a_8 = 3 \times 8 - 2 = 22$ となり、確かめられる。

次に、21が現れるかを調べる。

$a_n = 21$ とおくと、 $3n - 2 = 21$ である。

両辺に2を加えると、 $3n = 23$ となる。

したがって、 $n = \frac{23}{3}$ である。

しかし、 $\frac{23}{3}$ は正の整数ではないため、21に対応する項の番号は存在しない。

よって、この数列では22は第8項に現れるが、21は項として現れない。

例題 3

第 n 段階で、同じ大きさのタイルを縦 n 枚、横 n 枚の正方形に並べると定める。このとき、第 n 段階のタイルの枚数を b_n とする。一般項 b_n と第 6 項 b_6 を求めよ。ただし、 n は 1 から始まる正の整数とする。

例題 3 の解答・解説

第 n 段階では、縦に n 枚、横に n 枚並べるため、タイルの枚数は縦の枚数と横の枚数の積で求められる。

したがって、 $b_n = n^2$ である。

第 6 項は $n = 6$ を代入する。

$$b_6 = 6^2 = 36$$

よって、第 6 段階のタイルの枚数は 36 枚である。

数列では、番号と値の関係を式で表すことで、必要な段階の値を直接求められる。

演習問題

練習問題 1

数列の一般項が $a_n = 2n^2 - 3$ で表されるとき、第 1 項から第 4 項までを求めよ。

練習問題 2

数列の一般項が $a_n = (-1)^n n$ で表されるとき、第 1 項から第 5 項までを求めよ。

練習問題 3

数列の一般項が $a_n = \frac{1}{n+1}$ で表されるとき、第 2 項、第 5 項を求めよ。

練習問題 4

数列の一般項が $a_n = n^2 - 4n + 4$ で表される。この数列に 0 が現れる項の番号をすべて求めよ。

練習問題 5

数列の一般項が $a_n = 5 - 2n$ で表される。この数列に -11 が現れるか調べよ。

練習問題 6

「最初の項を 4 とし、次の項は前の項より 3 小さくして続ける」という規則で数列を作る。この数列の一般項を求めよ。

練習問題 7

無限数列の最初の 4 項だけが 1, 4, 7, 10 と分かっている。この 4 項だけから一般項を一意に決めることができるか説明せよ。

練習問題 8

数列の一般項が $a_n = n(n-3)$ で表される。この数列の項の中に同じ値が複数回現れるか調べよ。

練習問題 1 の解答・解説

一般項 $a_n = 2n^2 - 3$ に、項の番号を代入する。

第 1 項は $n = 1$ より、 $a_1 = 2 \times 1^2 - 3 = -1$ である。

第 2 項は $n = 2$ より、 $a_2 = 2 \times 2^2 - 3 = 5$ である。

第 3 項は $n = 3$ より、 $a_3 = 2 \times 3^2 - 3 = 15$ である。

第 4 項は $n = 4$ より、 $a_4 = 2 \times 4^2 - 3 = 29$ である。

したがって、第 1 項から第 4 項は $-1, 5, 15, 29$ である。

一般項が与えられている場合は、求めたい項の番号を正の整数として代入する。

練習問題 2 の解答・解説

一般項 $a_n = (-1)^n n$ に番号を代入する。

$(-1)^n$ の部分によって符号が変化することに注意する。

第 1 項は、 $a_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$ である。

第 2 項は、 $a_2 = (-1)^2 \times 2 = 2$ である。

第 3 項は、 $a_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$ である。

第 4 項は、 $a_4 = (-1)^4 \times 4 = 4$ である。

第 5 項は、 $a_5 = (-1)^5 \times 5 = -5$ である。

したがって、初めの 5 項は $-1, 2, -3, 4, -5$ である。

項の値には負数が含まれていてもよいが、番号 n は本講では 1 から始まる正の整数である。

練習問題 3 の解答・解説

一般項 $a_n = \frac{1}{n+1}$ に、求めたい番号を代入する。

第 2 項では $n = 2$ であるから、 $a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ となる。

第 5 項では $n = 5$ であるから、 $a_5 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$ となる。

したがって、第 2 項は $\frac{1}{3}$ 、第 5 項は $\frac{1}{6}$ である。

分数も数列の項の値として扱うことができる。

練習問題 4 の解答・解説

0 が現れるとは、ある正の整数 n に対して $a_n = 0$ になることである。

一般項 a_n が 0 になる条件を調べるため、 $a_n = 0$ と置く。これは項の値を 0 とする条件であり、番号 $n = 0$ を代入するという意味ではない。

$$n^2 - 4n + 4 = 0$$

左辺を因数分解すると、 $(n - 2)^2 = 0$ となる。

したがって、 $n = 2$ である。

n は正の整数という条件を満たすため、第 2 項が 0 になる。

よって、0 が現れる項の番号は $n = 2$ である。

練習問題 5 の解答・解説

-11 が項として現れるかを調べるには、 $a_n = -11$ となる正の整数 n が存在するか確認する。

一般項へ代入すると、 $5 - 2n = -11$ である。

両辺に 11 を加えると、 $16 - 2n = 0$ となるので、 $2n = 16$ である。

したがって、 $n = 8$ となる。

$n = 8$ は正の整数なので、この数列には -11 が現れる。

実際に、第 8 項の値は $a_8 = 5 - 2 \times 8 = -11$ である。

練習問題 6 の解答・解説

最初の項は 4 であり、そこから 3 ずつ小さくなる数列である。

項を並べると、 $4, 1, -2, -5, \dots$ となる。

第 n 項では、最初の 4 から 3 を $n - 1$ 回引く。

したがって、

$$\begin{aligned}a_n &= 4 - 3(n - 1) \\ &= 7 - 3n\end{aligned}$$

である。

よって、一般項は $a_n = 7 - 3n$ となる。

規則を式にするときは、第 n 項までに何回変化が起こるかを考える。

練習問題 7 の解答・解説

最初の 4 項だけを見ると、いくつかの規則を考えることができる。

例えば、最初の項を 1 とし、その後はずっと 3 ずつ増加する規則で数列を続けるとする。この場合、数列は $1, 4, 7, 10, 13, \dots$ となり、第 5 項は 13 になる。

一方で、最初の 4 項は $1, 4, 7, 10$ と同じままにして、第 4 項以降はずっと 10 であるという規則で数列を続けることもできる。この場合、数列は $1, 4, 7, 10, 10, \dots$ となり、第 5 項は 10 になる。

このように、最初の 4 項が同じでも、第 5 項以降の続き方が異なる数列を作ることができる。

したがって、無限数列の一部の項だけからでは、一般項を一意に決めることはできない。一般項を求めるには、数列の規則が指定されている必要がある。

練習問題 8 の解答・解説

同じ値が複数回現れるかを調べるため、異なる正整数の番号で同じ値になる場合を考える。

まず、いくつかの項を確認する。

$n = 1$ のとき、 $a_1 = 1(1 - 3) = -2$ である。

$n = 2$ のとき、 $a_2 = 2(2 - 3) = -2$ である。

したがって、 $a_1 = a_2 = -2$ となり、同じ値が複数の項に現れることが分かる。

さらに、異なる正整数 m, n に対して同じ値になる条件を確認する。

$a_m = a_n$ とすると、 $m(m - 3) = n(n - 3)$ である。

整理すると、 $m^2 - 3m = n^2 - 3n$ となる。

移項して因数分解すると、 $(m - n)(m + n - 3) = 0$ となる。

したがって、 $m = n$ または $m + n = 3$ である。

異なる番号で同じ値になる場合は $m + n = 3$ であり、 m, n は正整数であるため、 $(m, n) = (1, 2)$ または $(2, 1)$ だけである。

よって、この数列では第 1 項と第 2 項がともに -2 となり、同じ値が複数回現れる。ただし、番号は本講では 1 から始まる正の整数であり、0 や負の番号は考えない。