第 264 講 離散グラフで経路を考える

学習目標

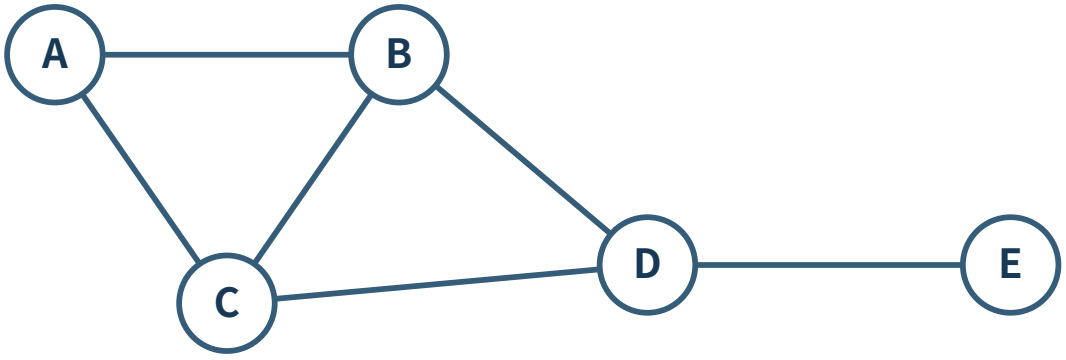
- 頂点列が歩道、小道、道、閉路のどれであるかを判定できる。
- 二つの頂点がつながっているかを、道の存在によって説明できる。
- 正の重みをもつグラフで経路の重みを計算し、最短経路を求められる。

1. 頂点を順にたどる

向きのない単純グラフ

$$V=\{A,B,C,D,E\},\quad E=\{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\},\{D,E\}\}$$

を考える。頂点を並べた列で、隣り合う二つの頂点が毎回辺で結ばれているものを**歩道**という。例えば A,B,C,D,E は歩道であり、その長さは通った辺の本数であるから 4 である。



歩道・小道・道・閉路

- **歩道**：隣り合う頂点が辺で結ばれている頂点列。頂点や辺を繰り返してもよい。
- **小道**：同じ辺を繰り返さない歩道。頂点は繰り返してもよい。
- **道**：同じ頂点を繰り返さない歩道。したがって同じ辺も繰り返さない。
- **閉路**：始点と終点だけが同じで、それ以外の頂点を繰り返さない、長さ 3 以上の閉じた歩道。

本講では、辺に向きがない場合、辺 AB を A から B へ通ることと B から A へ通ることは同じ辺を通ることとする。また、「経路」は文脈に応じて頂点をたどる列を表す一般的な語として用い、種類を厳密に区別するときは上の用語を使う。

©ミライコーチング

例題 1：たどり方を分類する

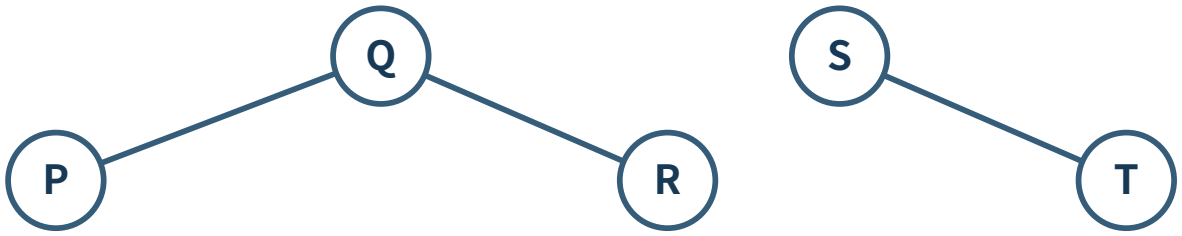
上のグラフで、次の頂点列が歩道であるかを調べよ。歩道なら、小道または道であるかも答えよ。
(1) A, B, C, B, D
(2) A, C, B, D, E
(3) A, B, E
(4) A, B, C, A

例題 1 の解答・解説

(1) 歩道である。辺 AB、BC、CB、BD を順に通るが、BC と CB は同じ辺なので小道ではない。また B を繰り返すので道でもない。
(2) 辺 AC、CB、BD、DE を順に通り、辺も頂点も繰り返さないので道である。道は小道でもあり、歩道でもある。
(3) B と E を結ぶ辺がないので歩道ではない。
(4) 辺 AB、BC、CA を順に通り、同じ辺を繰り返さないので小道である。また、始点と終点だけが同じで長さ 3 であるから閉路でもある。始点を繰り返すので、ここで定義した道ではない。

2. つながっていることを道で表す

二つの頂点の間に道が存在するとき、その二つは**連結している**という。グラフのどの二頂点の間にも道があるとき、そのグラフを**連結グラフ**という。



このグラフでは P と R の間に道 P, Q, R があるので、P と R は連結している。一方、P と S の間には道がない。頂点集合は、互いに道で行き来できるまとまり $\{P, Q, R\}$ と $\{S, T\}$ に分かれる。このような最大のまとまりを**連結成分**といい、このグラフには連結成分が 2 個ある。

例題 2：連結性を調べる

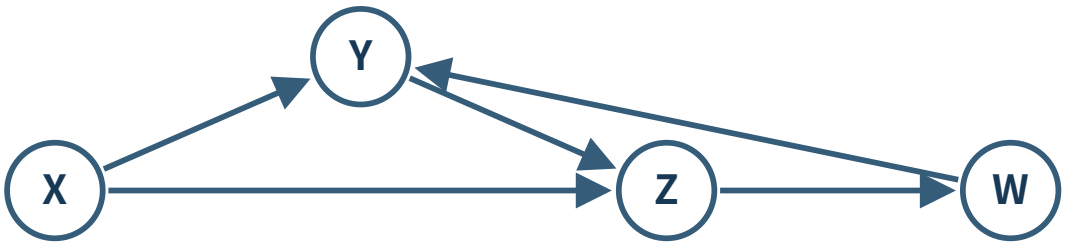
上のグラフについて答えよ。
(1) Q から P への道と、Q から R への道を一つずつ答えよ。
(2) グラフ全体は連結か。
(3) 辺を 1 本だけ加えて連結グラフにする方法を一つ答えよ。

例題 2 の解答・解説

(1) Q から P へは Q, P、Q から R へは Q, R が道である。
(2) 連結ではない。例えば P と S の間に道が存在しないからである。
(3) 例えば辺 RS を加える。すると異なる二つの連結成分がつながり、任意の二頂点の間に道ができる。辺 PS、PT、QS、QT のいずれを加えてもよい。

3. 有向グラフでは矢印に従う

有向グラフでは、有向辺の矢印に従って頂点をたどる。有向辺 $X \to Y$ があっても、逆向きの $Y \to X$ がなければ Y から X へその辺をたどることはできない。



例題 3：向きのある経路

上の有向グラフについて答えよ。
(1) X から W への道を二つ答えよ。
(2) Z から X への有向な歩道は存在するか。
(3) Y, Z, W, Y は何を表すか。

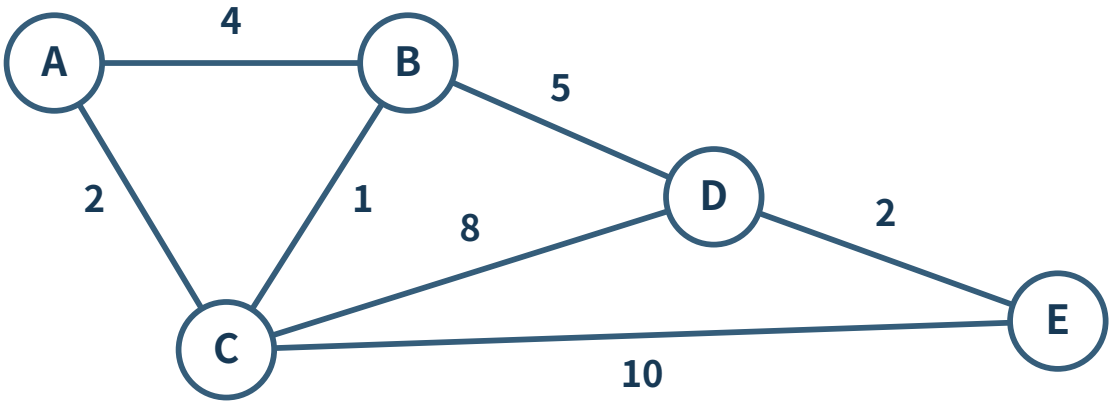
例題 3 の解答・解説

(1) X, Z, W と X, Y, Z, W である。どちらも矢印の向きに従い、頂点を繰り返さない。
(2) 存在しない。Z からは W、W からは Y、Y からは Z へ進むが、このまとまりから X へ入る有向辺がないからである。
(3) 矢印 $Y \to Z \to W \to Y$ に従う、長さ 3 の有向な閉路である。

©ミライコーチング

4. 重み付きグラフと最短経路

辺に距離、時間、費用などの数を付けたグラフを**重み付きグラフ**という。経路の重みは、通る辺の重みの和である。ここではすべての重みを正の数とする。



例えば道 A, C, D, E の重みは $2+8+2=12$ である。二頂点を結ぶ経路のうち、重みの和が最小のものを**最短経路**という。重みがすべて正なら、同じ頂点を含む回り道を取り除くと重みは必ず小さくなる。したがって最短経路を探すときは、頂点を繰り返さない道だけを比較すればよい。

例題 4：最短経路を求める

上の重み付きグラフで、A から E までの最短経路と、その重みを求めよ。頂点を繰り返さない道をすべて調べて確かめよ。

例題 4 の解答・解説

A から E までの道と重みは次のとおりである。

道	重み
A, C, E	$2+10=12$
A, C, D, E	$2+8+2=12$
A, C, B, D, E	$2+1+5+2=10$
A, B, D, E	$4+5+2=11$
A, B, C, E	$4+1+10=15$
A, B, C, D, E	$4+1+8+2=15$
A, B, D, C, E	$4+5+8+10=27$

E に入る辺は CE または DE である。各場合をさかのぼることで、上の 7 通りがすべてである。最小は 10 なので、最短経路は A, C, B, D, E、その重みは 10 である。

最短経路を確かめる手順

1. 辺の向きの有無と重みを確認する。
2. 始点から終点までの候補を挙げる。
3. 各候補で、通る辺の重みをすべて加える。
4. 候補の挙げ漏れがないことを辺集合から確認し、最小値を比べる。

演習問題

問題 1：歩道・小道・道

辺集合を $\{\{A,B\},\{B,C\},\{C,D\},\{D,A\},\{B,D\}\}$ とする。次の頂点列を分類せよ。
(1) A, B, D, C
(2) A, B, D, A
(3) A, B, C, B, D

問題 2：長さと閉路

問題 1 のグラフで、A, B, C, D, A の長さを答え、閉路である理由を述べよ。

問題 3：連結成分

$V=\{A,B,C,D,E,F\}$、$E=\{\{A,B\},\{B,C\},\{D,E\}\}$ とする。連結成分をすべて答え、個数を求めよ。また、グラフ全体を連結にするために少なくとも何本の辺を加える必要があるか。

問題 4：有向な道

有向辺が $P\to Q$、$Q\to R$、$R\to P$、$R\to S$ の 4 本である。
(1) P から S への道を一つ答えよ。
(2) S から P への有向な歩道は存在するか。
(3) 有向な閉路を一つ答えよ。

問題 5：経路の重み

例題 4 の重み付きグラフで、B から E までの道 B, C, A は E に到達する経路ではない。その理由を述べよ。また、道 B, C, D, E の重みを求めよ。

問題 6：最短経路

向きのない重み付きグラフの辺と重みを

$$AB:3,\quad AC:6,\quad BC:2,\quad BD:4,\quad CD:1$$

とする。すべての重みは正である。A から D までの頂点を繰り返さない道をすべて挙げ、最短経路とその重みを求めよ。

解答・解説

問題 1 の解答・解説

(1) 辺 AB、BD、DC を通り、頂点を繰り返さないので道である。
(2) 辺 AB、BD、DA を通り、同じ辺を繰り返さないので小道である。また、始点と終点だけが同じで長さ 3 なので閉路でもある。始点 A を繰り返すため、ここで定義した道ではない。
(3) 辺 AB、BC、CB、BD を通るので歩道である。しかし BC と CB は同じ辺であり、頂点 B を繰り返すので、小道でも道でもない。

問題 2 の解答・解説

通る辺は AB、BC、CD、DA の 4 本なので長さは 4 である。始点と終点だけが A で一致し、途中の B、C、D は繰り返さず、長さ 3 以上なので閉路である。

問題 3 の解答・解説

連結成分は $\{A, B, C\}$、$\{D, E\}$、$\{F\}$ の 3 個である。3 個の連結成分を一つにまとめるには少なくとも 2 本必要であり、例えば辺 CD と EF を加えれば 2 本で連結になる。

問題 4 の解答・解説

(1) P, Q, R, S である。
(2) 存在しない。S から出る有向辺がないからである。
(3) P, Q, R, P である。矢印の向きに従い、始点と終点以外を繰り返さない。

問題 5 の解答・解説

B, C, A の終点は A であり、E に到達していないので、B から E への経路ではない。B, C, D, E の重みは $1 + 8 + 2 = 11$ である。

問題 6 の解答・解説

A から D までの道と重みは次の 4 通りである。

道	重み
A, B, D	$3 + 4 = 7$
A, C, D	$6 + 1 = 7$
A, B, C, D	$3 + 2 + 1 = 6$
A, C, B, D	$6 + 2 + 4 = 12$

したがって最短経路は A, B, C, D で、重みは 6 である。正の重みなので、頂点を繰り返す歩道は回り道を除けば必ず軽くなり、最短にはならない。

©ミライコーチング