

第 113 講 三角方程式

学習目標

この講では、三角関数の値を満たす角を単位円やグラフの交点から考え、指定された範囲内の解と周期を含む一般解を求められるようになることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- $\sin x = a$ 、 $\cos x = a$ 、 $\tan x = a$ の解を、単位円の座標や周期性から判断できる。
- $\sin x = \sin \alpha$ 、 $\cos x = \cos \alpha$ 、 $\tan x = \tan \alpha$ の一般解を使い分けられる。
- $0 \leq x < 2\pi$ のような半開区間で、端点の扱いに注意して解をすべて求められる。
- 置換によって角の範囲が変わる場合、元の変数へ戻す前に新しい範囲を確認できる。

三角方程式を解く考え方

三角方程式とは、三角関数を含む方程式であり、例えば $\sin x = \frac{1}{2}$ のような形を解く問題である。三角方程式で重要なのは、三角関数の値から角を 1 つだけ探すのではなく、その値になるすべての角を調べることである。

単位円では、角 x に対応する点の座標が $(\cos x, \sin x)$ になる。つまり、 $\sin x$ は点の縦座標、 $\cos x$ は点の横座標を表す。

例えば $\sin x = \frac{1}{2}$ は、単位円上で縦座標が $\frac{1}{2}$ になる点を探すことを意味する。そのため、1 つの点だけではなく水平線との交点をすべて確認する必要がある。

また、三角関数には周期がある。 $\sin x$ と $\cos x$ は 2π ごとに同じ値になり、 $\tan x$ は π ごとに同じ値になる。

ただし、いきなり周期を加えるのではなく、まず 1 周期分の範囲で解をすべて調べ、その後に周期を加えることで一般解を表す。

指定区間で求めた解は、その区間内だけの解であり、一般解へ広げる場合には周期を正しく利用する必要がある。

三角関数の値には範囲があることにも注意する。 $\sin x$ と $\cos x$ の値は必ず $-1 \leq \sin x \leq 1$ 、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ を満たすため、例えば $\sin x = 2$ のような方程式には実数解が存在しない。 $\tan x$ はすべての実数値をとるが、 $\cos x = 0$ の場所では定義されない。

三角方程式の基本形

三角関数の基本的な一般解は、単位円の対称性と周期から考える。

$\sin x = \sin \alpha$ のとき、同じ値をもつ点と同じ縦座標をもつため、 y 軸に関して左右対称になる。したがって、 $x = \alpha + 2k\pi$ または $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ である。

$\cos x = \cos \alpha$ のとき、同じ値をもつ点と同じ横座標をもつため、 x 軸に関して上下対称になる。したがって、 $x = \pm \alpha + 2k\pi$ である。

$\tan x = \tan \alpha$ のとき、正接は π 周期で同じ値をとるため、 $x = \alpha + k\pi$ である。ただし、 α は $\cos \alpha \neq 0$ を満たし、正接が定義される角とする。

ここで k は整数である。

なお、 $\sin x = 1$ 、 $\sin x = -1$ 、 $\cos x = 1$ 、 $\cos x = -1$ のように単位円上の対称な点と同じ点になる場合は、2 つの枝を別々の解として数えず、重複を除く必要がある。

指定区間 $0 \leq x < 2\pi$ では、0 は含むが 2π は含まない。この半開区間の条件を最後まで保つことが重要である。

例題 1

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\sin x = \frac{1}{2}$ を満たす x を求め、その後一般解を示しなさい。

例題 1 の解説

$\sin x$ は単位円上の点の縦座標を表すため、 $\sin x = \frac{1}{2}$ は縦座標が $\frac{1}{2}$ になる点を探す問題である。特別な角から、 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ であることが分かる。単位円では水平線 $y = \frac{1}{2}$ と円の交点が 2 つあり、正の x 座標をもつ点と負の x 座標をもつ点が存在する。

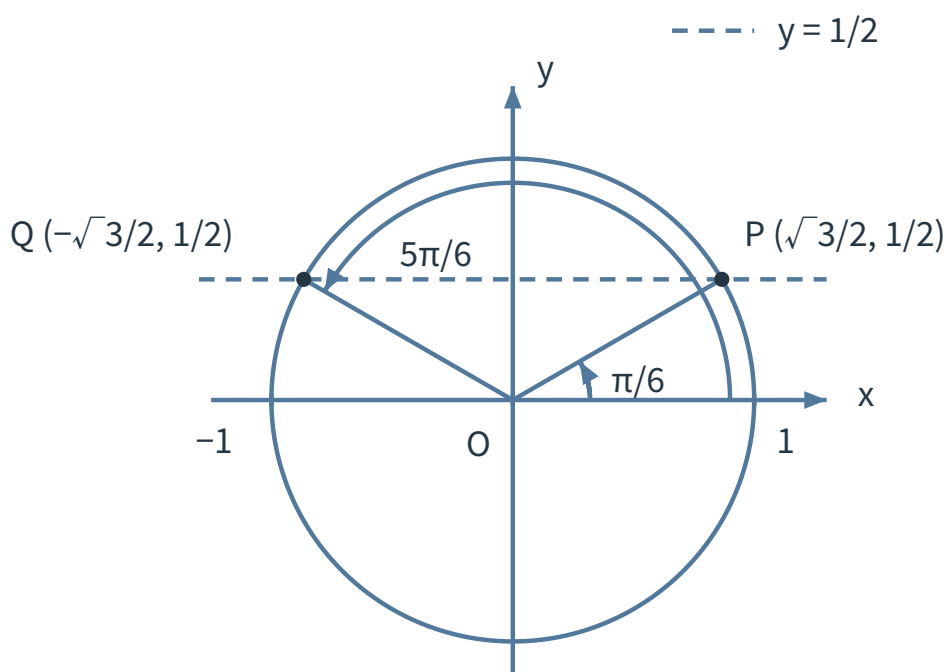


図1 単位円と破線 $y = 1/2$ の交点 P・Q（正の角は $\pi/6$ 、 $5\pi/6$ ）

1 つ目の交点は第 1 象限の角 $\frac{\pi}{6}$ であり、もう 1 つの交点は第 2 象限の角である。正弦は縦座標なので、第 2 象限でも同じ高さになる。

したがって、指定区間では $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ である。

一般解では、同じ位置関係が 2π ごとに繰り返されるため、 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ または $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ となる。ただし、 k は整数である。

この問題では、1 つの角だけを答えると、周期による無限個の解や指定区間内のもう 1 つの解を見落としてしまう。

例題 2

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\tan x = -1$ を満たす x を求め、その後一般解を示しなさい。

例題 2 の解説

$\tan x$ は、単位円上の点そのものの傾きではなく、原点と単位円上の点を結ぶ直線の傾きとして考えることができる。したがって、 $\cos x = 0$ のときは直線が垂直になり、 $\tan x$ は定義されない。

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$ なので、 $\tan x = -1$ となる基準角は $\frac{\pi}{4}$ である。正接が負になるのは第 2 象限と第 4 象限である。

したがって、指定区間では $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ となる。

ここで注意することは、 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ は解ではないという点である。これらの角では $\cos x = 0$ となり、 $\tan x$ は定義されない。

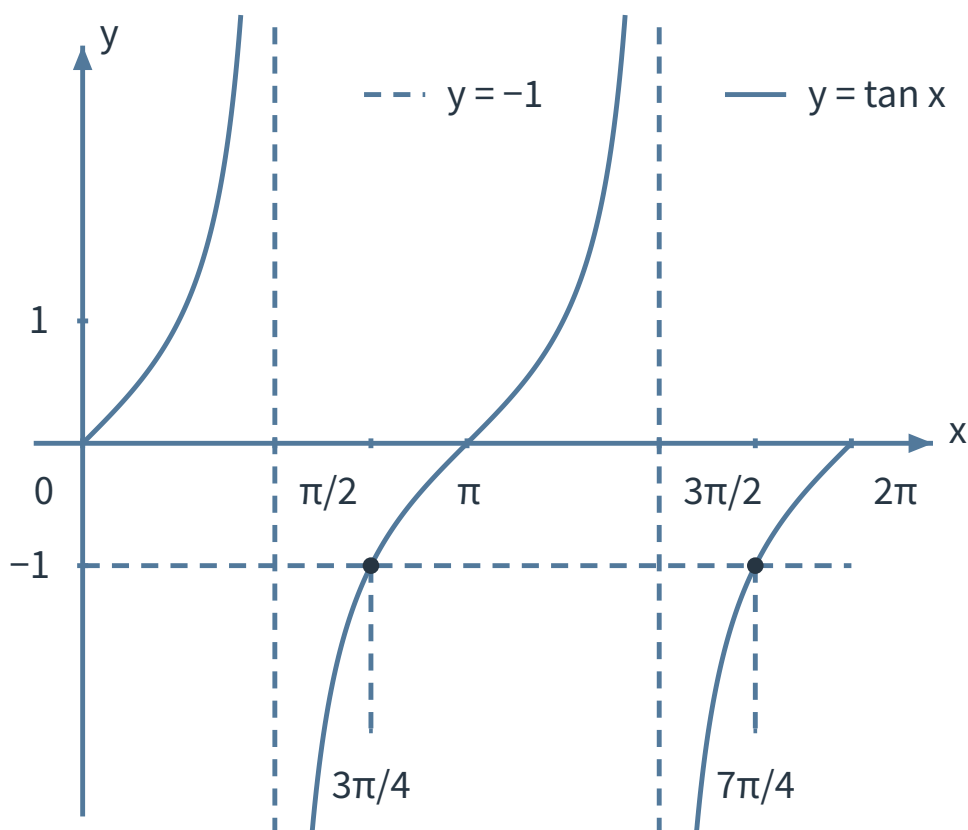


図 2 実線 $y = \tan x$ と破線 $y = -1$ ($0 \leq x < 2\pi$, 2π は含めない)

正接は π 周期であるため、一般解は $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ または同値な形として

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ と表せる。ただし、 k は整数である。

一般解では、正接の周期が 2π ではなく π であることを利用する。

例題 3

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす x を求めなさい。

例題 3 の解説

角が $2x$ になっているため、そのまま x の範囲で考えず、新しい角を置く。

$t = 2x$ とすると、もとの条件 $0 \leq x < 2\pi$ から、 $0 \leq t < 4\pi$ となる。

ここで $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解く。基準となる角は $\frac{\pi}{3}$ であり、正弦が正になる第 1 象限と第 2 象限に解がある。

$0 \leq t < 4\pi$ では、2 周期分を調べる必要があるため、 $t = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$ となる。

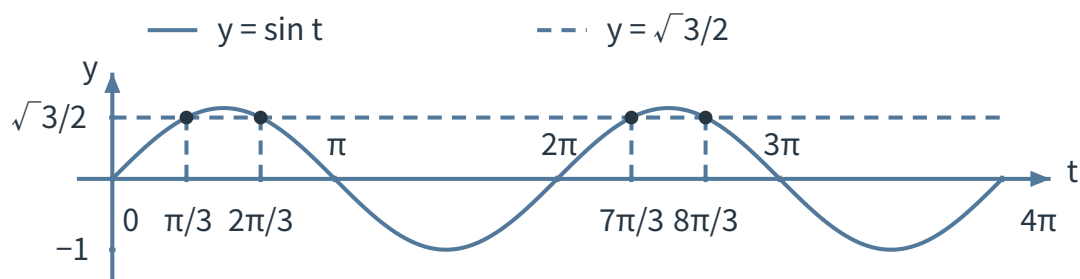


図 3 実線 $y = \sin t$ と破線 $y = \sqrt{3}/2$ ($0 \leq t < 4\pi$, 4π は含めない)

$t = 2x$ なので、それぞれを 2 で割る。

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$$

最後に、得られた値を元の方程式へ代入して確認する。例えば $x = \frac{7\pi}{6}$ のとき、 $2x = \frac{7\pi}{3}$ となり、 $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるため条件を満たす。

このように、角を置き換えた場合は、置換後の角の範囲も変更する必要がある。 $0 \leq x < 2\pi$ のまま t を調べると、必要な解を取り逃す。

三角方程式での変形上の注意

三角方程式では、式変形によって解が変化することがある。

例えば両辺をある式で割る場合、その式が 0 になる場合を別に確認しなければならない。2 乗する場合も、もとの式にはなかった解が入り込むことがある。

そのため、変形後の式だけで判断せず、最後に元の方程式へ代入して確認することが大切である。

また、 $\tan x$ を扱う場合は、 $\cos x = 0$ となる角が定義域から外れることを常に確認する。

演習問題

演習問題 1

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\sin x = -\frac{1}{2}$ を満たす x を求め、その後一般解を示しなさい。

演習問題 2

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を満たす x を求め、その後一般解を示しなさい。

演習問題 3

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\tan x = \sqrt{3}$ を満たす x を求め、その後一般解を示しなさい。

演習問題 4

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\cos x(\sin x - 1) = 0$ を解きなさい。また、 $\cos x$ で両辺を割る変形を行うと何を見落とすか説明しなさい。

演習問題 5

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\sin x + \cos x = 1$ を解きなさい。合成を用いる場合、置換後の角の範囲にも注意しなさい。

演習問題 6

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\sin x = 3$ を満たす x が存在するか判定し、理由を説明しなさい。

演習問題 7

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の方程式を解きなさい。また、それぞれの一般解も示しなさい。

- (1) $\sin x = 1$
- (2) $\cos x = 1$

演習問題 8

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ を解きなさい。
 $t = 3x$ と置く場合、 t の範囲を正しく設定し、最後に元の方程式への代入確認を行いなさい。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

$\sin x = -\frac{1}{2}$ は、単位円上で縦座標が $-\frac{1}{2}$ になる点を探す問題である。

基準角は $\frac{\pi}{6}$ であり、正弦が負になるのは第 3 象限と第 4 象限である。

したがって、指定区間では $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ である。

一般解は、正弦の周期が 2π であることから、 $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ または $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ となる。ただし、 k は整数である。

指定区間では 2π を含まないため、 $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi$ のような値は解として採用しない。

演習問題 2 の解答・解説

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ は、単位円上で横座標が $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ になる点を探す。

基準角は $\frac{\pi}{4}$ であり、余弦が負になるのは第 2 象限と第 3 象限である。

よって、指定区間では $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ である。

同じ横座標をもつ単位円上の点は、 x 軸に関して上下対称な位置にある。そのため、 $\cos x = \cos \alpha$ の解は α と $-\alpha$ の形で表される。

一般解は $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ と表せる。ただし、 k は整数である。

このとき、 $\pm$ の意味は 2 つの角を表すことであり、同じ角を二重に数えることではない。

演習問題 3 の解答・解説

$\tan x = \sqrt{3}$ では、正接の周期が π であることを利用する。

$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ であるため、基準となる角は $\frac{\pi}{3}$ である。

正接は第 1 象限と第 3 象限で正になるので、指定区間では $x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ である。

一般解は $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ となる。ただし、 k は整数である。

また、 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ では $\cos x = 0$ となるため、 $\tan x$ は定義されず解にはならない。

演習問題 4 の解答・解説

積の形になっているため、積が 0 になる条件を利用する。

$\cos x(\sin x - 1) = 0$ より、 $\cos x = 0$ または $\sin x - 1 = 0$ である。

まず、 $\cos x = 0$ より、 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ を得る。

次に、 $\sin x - 1 = 0$ より、 $\sin x = 1$ となるため、 $x = \frac{\pi}{2}$ である。

2 つの場合の共通解である $\frac{\pi}{2}$ は重複して数えない。したがって、指定区間での解は $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ である。

ここで $\cos x$ で両辺を割る操作を考える。この操作は $\cos x \neq 0$ の場合にだけ有効であり、 $\cos x = 0$ の場合を別に確認しなければならない。

実際、得られた 2 つの解はどちらも $\cos x = 0$ を満たしている。そのため、 $\cos x$ で割る前提条件を無視してはいけな

い。もし単純に割って $\sin x - 1 = 0$ だけを解くと、 $x = \frac{\pi}{2}$ しか得られず、 $x = \frac{3\pi}{2}$ を落としてしまう。また、残った $\frac{\pi}{2}$ も本来は除算を行えない $\cos x = 0$ の範囲に含まれているため、割った後の式だけで元の方程式を表しているわけではない。

演習問題 5 の解答・解説

$\sin x + \cos x$ は合成すると 1 つの三角関数として扱える。

$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ であるから、 $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ となる。

ここで、 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。

$y = x + \frac{\pi}{4}$ と置くと、もとの範囲 $0 \leq x < 2\pi$ から、 $\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{9\pi}{4}$ となる。

周期から境界を含めた候補を考えると、 $y = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ となる。しかし、採用する区間は $\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{9\pi}{4}$ であり、右端の $\frac{9\pi}{4}$ は含まれないため解から除く。

したがって、次のように計算する。

$$x = 0, \frac{\pi}{2}$$

実際に代入すると、 $x = 0$ では $\sin 0 + \cos 0 = 1$ 、 $x = \frac{\pi}{2}$ では $\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$ となり、元の式を満たす。

演習問題 6 の解答・解説

$\sin x$ の値の範囲は $-1 \leq \sin x \leq 1$ である。

したがって、 $\sin x = 3$ を満たす実数 x は存在しない。

三角方程式では、角を探す前に三角関数を取り得る値の範囲を確認することで、解なしをすぐ判断できる場合がある。

演習問題 7 の解答・解説

(1) $\sin x = 1$ を考える。

正弦は単位円上の縦座標である。最大値 1 になる点は上端の 1 点だけであり、対称な 2 つの枝が同じ点になるため、重複して数えない。

指定区間 $0 \leq x < 2\pi$ では、 $x = \frac{\pi}{2}$ である。

一般解は $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ となる。ただし、 k は整数である。

(2) $\cos x = 1$ を考える。

余弦は単位円上の横座標であり、最大値 1 になる点は右端の 1 点だけである。

指定区間 $0 \leq x < 2\pi$ では、 $x = 0$ である。 $x = 2\pi$ も同じ位置になるが、半開区間では 2π を含まないため解にはならない。

一般解は $x = 2k\pi$ となる。ただし、 k は整数である。

このように、端の値では対称な枝が別々の点にならない場合があるため、解を重複して数えないことが重要である。

演習問題 8 の解答・解説

$t = 3x$ と置く。

もとの範囲 $0 \leq x < 2\pi$ から、 $0 \leq t < 6\pi$ となる。

ここで、 $\sin t = \frac{1}{2}$ を考える。

1 周期では $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ であり、範囲が $0 \leq t < 6\pi$ なので 3 周期分調べる。

したがって、次のように計算する。

$$t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}$$

$t = 3x$ より、すべて 3 で割る。

$x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$ である。

最後に元の式へ代入すると、例えば

$x = \frac{13\pi}{18}$ では $3x = \frac{13\pi}{6}$ となり、 $\sin \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$ であるため条件を満たす。

角を置換する問題では、置換後の角の範囲を変更し忘れると解の個数が不足する。元の変数の範囲ではなく、置換した角の範囲で周期を数えることが重要である。