

第 98 講 条件から軌跡を求める

学習目標

- ・動く点を $P(x, y)$ とおき、与えられた条件を x, y の方程式へ直すことができる。
- ・得られた方程式が表す図形を読み取り、軌跡として答えることができる。
- ・得られた方程式を満たす点が、逆にもとの条件を満たすことを確かめることができる。

1. 条件と方程式を両方向に結ぶ

条件から式を作るだけでは終わらない

軌跡を求めるときは、動く点を $P(x, y)$ とおき、問題文の条件を x, y の方程式へ直す。
たとえば、条件から方程式 $F(x, y) = 0$ が得られたとする。このとき確認したい方向は 2 つある。

- ・もとの条件を満たす点ならば、 $F(x, y) = 0$ を満たす。
- ・ $F(x, y) = 0$ を満たす点ならば、もとの条件を満たす。

この両方向が成立すれば、方程式 $F(x, y) = 0$ が表す図形を、その条件を満たす点の軌跡といえる。
一方向しか確かめていないと、もとの条件を満たさない余分な点まで含めてしまう可能性がある。
軌跡では「条件を満たす点すべてであり、それ以外を含まない」ことが重要である。

条件から軌跡を求める手順

1. 動く点を $P(x, y)$ とおく。
2. 距離などの条件を座標を使った式へ直す。
3. 式を整理して、直線や円などの方程式を得る。
4. 得られた方程式を満たす点が、逆にもとの条件を満たすことを確かめる。
5. 方程式が表す図形を軌跡として答える。

2. 2 点から等距離という条件

条件 $PA = PB$ を方程式へ直す

点 $A(-3, 1)$ 、 $B(1, 1)$ から等距離にある点 $P(x, y)$ の軌跡を考える。

条件は $PA = PB$ である。距離 PA と PB はともに 0 以上なので、 $PA = PB$ であることと $PA^2 = PB^2$ であることは同じ意味になる。

座標から $PA^2 = (x + 3)^2 + (y - 1)^2$ 、 $PB^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ である。共通の $(y - 1)^2$ を消すと、

$$(x + 3)^2 = (x - 1)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 2x + 1$$

$$8x = -8$$

$$x = -1$$

となる。

逆に、 $x = -1$ を満たす点 $P(-1, y)$ について調べると、 $PA^2 = 4 + (y - 1)^2$ 、 $PB^2 = 4 + (y - 1)^2$ である。したがって $PA = PB$ である。

よって、求める軌跡は直線 $x = -1$ である。この直線は線分 AB の垂直二等分線である。

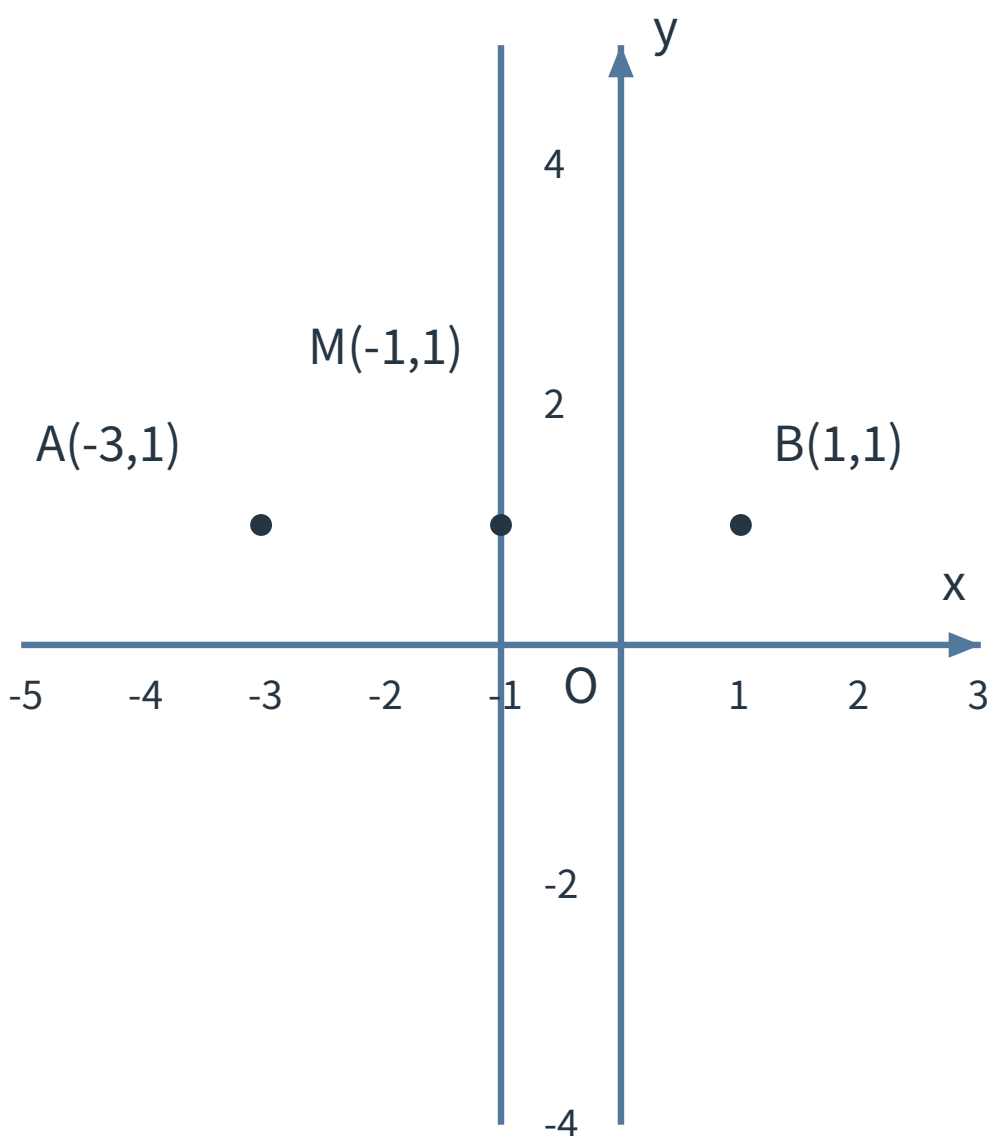


図 1 $A(-3,1)$ 、 $B(1,1)$ から等距離にある点の軌跡 $x = -1$

距離を 2 乗するときの確認

距離は必ず 0 以上である。そのため、2 つの距離 PA 、 PB については $PA = PB$ と $PA^2 = PB^2$ を行き来できる。

式を 2 乗する操作を機械的に使うのではなく、なぜ逆方向も成り立つのかを確認することが大切である。

3. 2 つの距離を組み合わせた条件

距離の 2 乗の和から円が現れる

点 $A(0,0)$ 、 $B(4,0)$ に対して、点 $P(x,y)$ が $PA^2 + PB^2 = 16$ を満たすとする。
座標を使って条件を書くと、

$$x^2 + y^2 + (x - 4)^2 + y^2 = 16$$

$$2x^2 - 8x + 16 + 2y^2 = 16$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

となる。

これは中心 $C(2, 0)$ 、半径 2 の円の方程式である。

逆に、 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ を満たす点では $x^2 - 4x + y^2 = 0$ が成り立つ。この式を用いると、

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 &= x^2 + y^2 + (x - 4)^2 + y^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 + 2y^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

となる。

したがって、条件 $PA^2 + PB^2 = 16$ を満たす点の軌跡は、中心 $(2, 0)$ 、半径 2 の円である。

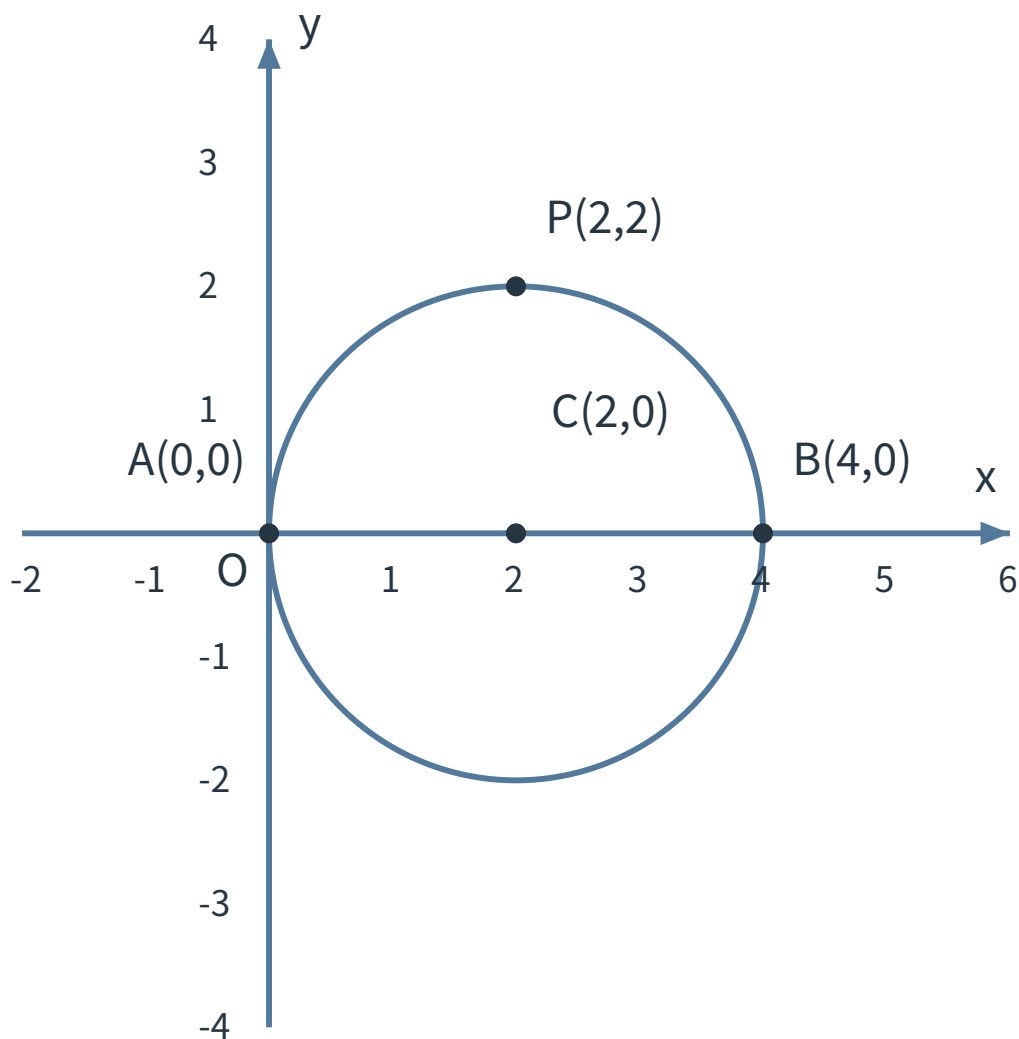


図 2 $PA^2 + PB^2 = 16$ を満たす点の軌跡

この図の点 $P(2, 2)$ では $PA^2 = 8$ 、 $PB^2 = 8$ であり、たしかに $PA^2 + PB^2 = 16$ となる。

4. 1つの条件から複数の直線が現れる場合

x 軸からの距離が2である点

点 $P(x, y)$ から x 軸までの距離は $|y|$ である。

したがって、 x 軸からの距離が2であるという条件は $|y| = 2$ であり、これは $y = 2$ または $y = -2$ を意味する。

逆に、 $y = 2$ または $y = -2$ を満たす点は、どちらも x 軸からの距離が2である。

したがって、求める軌跡は2本の直線 $y = 2$ 、 $y = -2$ である。

軌跡は必ず1本の直線や1つの円になるとは限らない。条件を満たす点をすべて集めると、複数の図形になることもある。

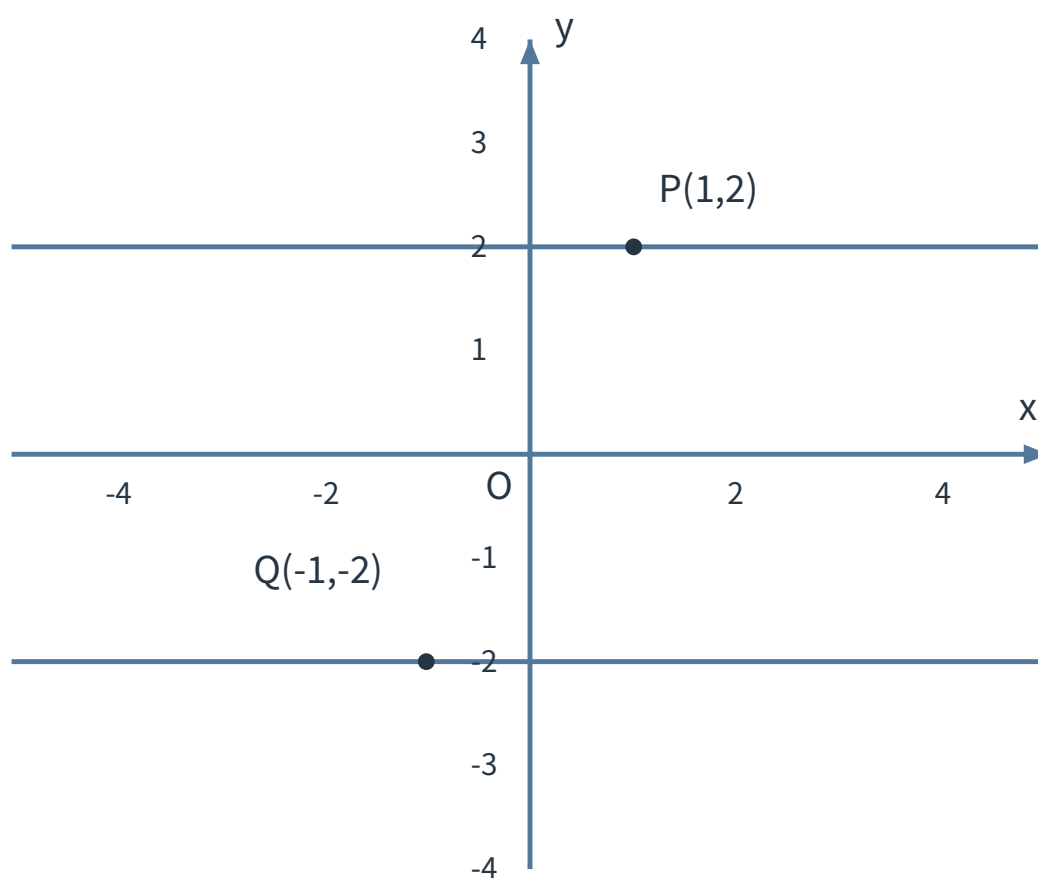


図3 x 軸からの距離が2である点の軌跡 $y = 2$ 、 $y = -2$

5. 例題

例題 1

点 $A(-2, -1)$ 、 $B(2, 3)$ から等距離である点 P の軌跡を求めよ。

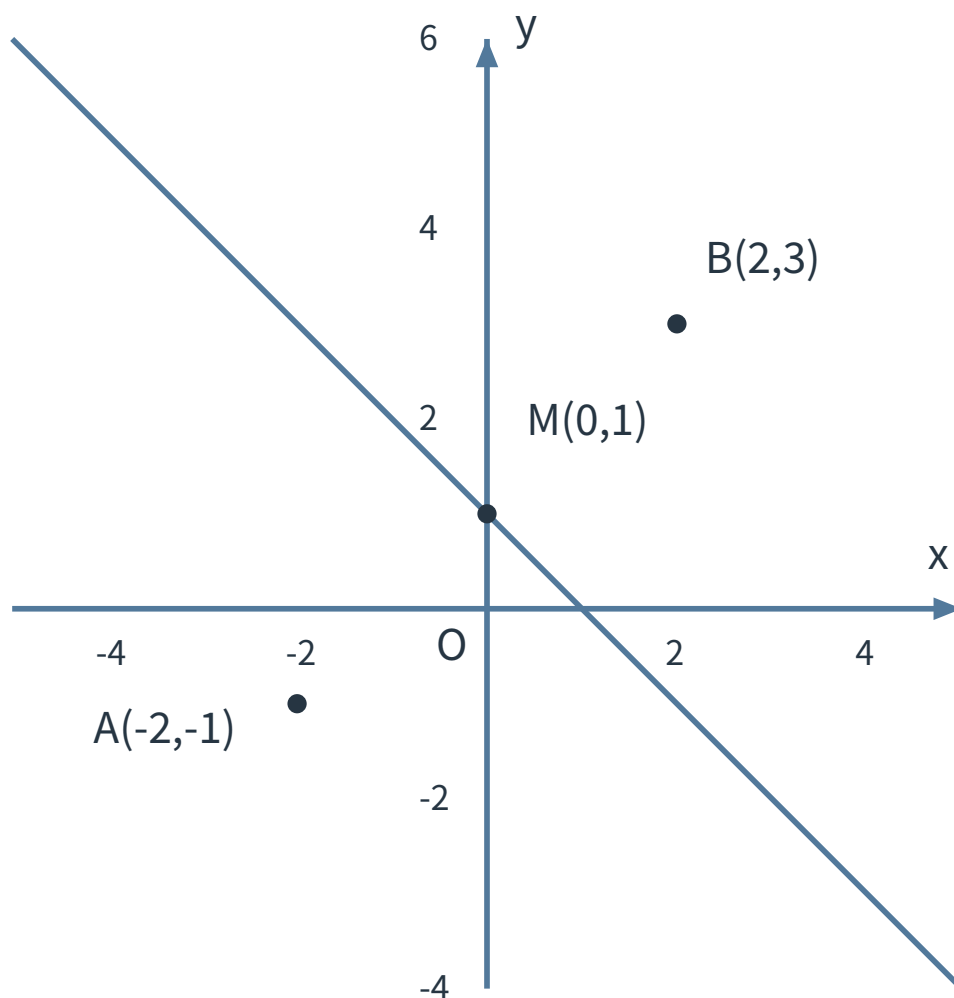


図4 例題1の点A、Bと軌跡

例題1の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとる。条件は $PA = PB$ である。

両方の距離は0以上なので、 $PA = PB$ であることと $PA^2 = PB^2$ であることは同じ意味である。座標から $PA^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2$ 、 $PB^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ である。両辺を展開し、共通する $x^2 + y^2$ を消すと、

$$4x + 2y + 5 = -4x - 6y + 13$$

$$8x + 8y = 8$$

$$x + y = 1$$

となる。

逆に、 $x + y = 1$ を満たす点では $8x + 8y = 8$ が成り立つ。上の式変形を逆にたどると $PA^2 = PB^2$ となり、距離はともに0以上なので $PA = PB$ である。

したがって、求める軌跡は直線 $x + y = 1$ である。図でも、この直線は線分 AB の中点 $M(0, 1)$ を通り、線分 AB に垂直である。

例題 2

点 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ に対して、 $PA^2 + PB^2 = 10$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

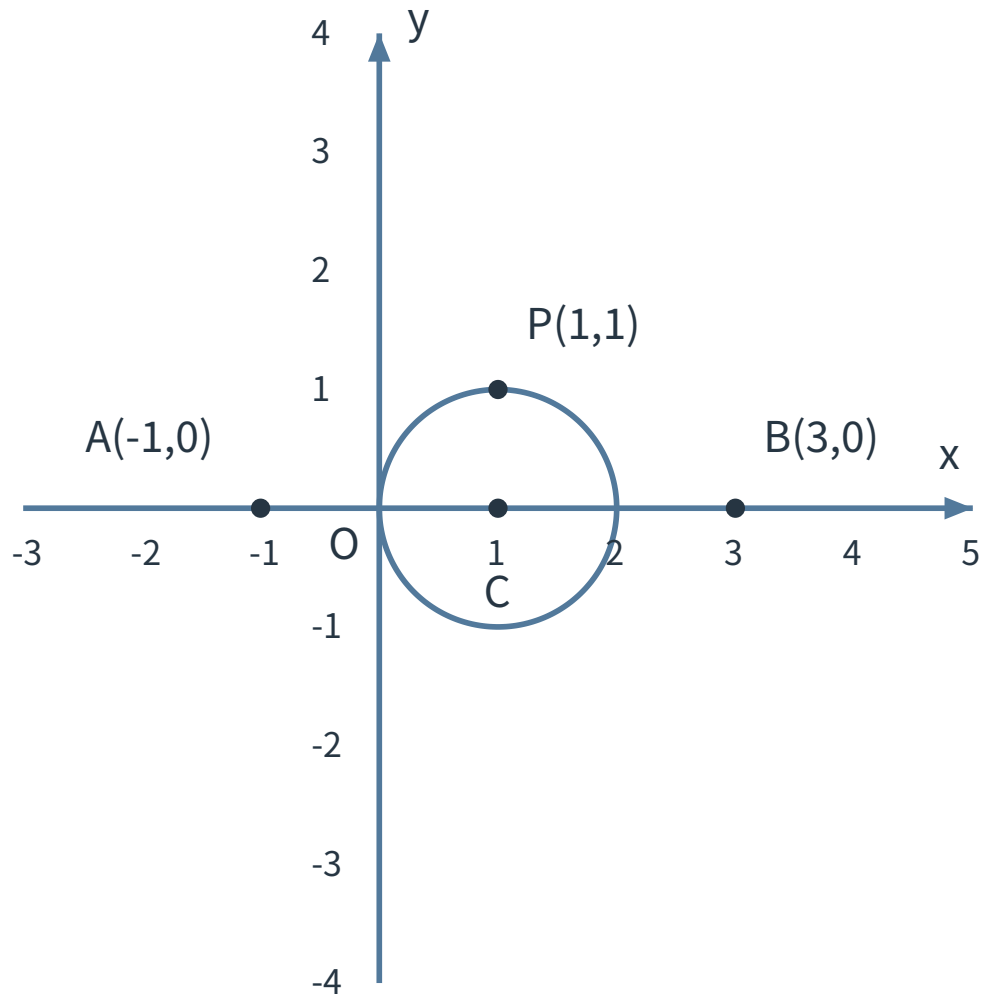


図 5 例題 2 の条件 $PA^2 + PB^2 = 10$ を満たす中心 $C(1,0)$ 、半径 1 の円

例題 2 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとる。

座標から $PA^2 = (x + 1)^2 + y^2$ 、 $PB^2 = (x - 3)^2 + y^2$ である。これらの和を展開して 10 に等しいと
おくと、

$$2x^2 - 4x + 10 + 2y^2 = 10$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

となる。

したがって、候補となる軌跡は中心 $(1, 0)$ 、半径 1 の円である。

逆に、 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ を満たす点では $x^2 - 2x + y^2 = 0$ が成り立つ。これを使うと $PA^2 + PB^2 = 10$ となるので、円上のすべての点がもとの条件を満たす。

したがって、求める軌跡は $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ で表される円である。

6. 演習問題

演習 1

点 $A(-4, 1)$ 、 $B(2, 1)$ から等距離である点 P の軌跡を求めよ。

演習 2

点 $A(0, -2)$ 、 $B(4, 2)$ から等距離である点 P の軌跡を求めよ。

演習 3

y 軸からの距離が 3 である点 P の軌跡を求めよ。

演習 4

点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$ に対して、 $PA^2 + PB^2 = 26$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

演習 5

方程式 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ が表す軌跡を、ある固定点からの距離という条件を用いて説明せよ。

演習 6

点 $A(0, -2)$ 、 $B(4, 2)$ がある。次の 3 点のうち、 $PA = PB$ を満たす点 P をすべて選べ。

- $(0, 2)$
- $(1, 0)$
- $(3, -1)$

7. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとる。条件は $PA = PB$ である。

距離はともに 0 以上なので、2 乗した距離を比べる。

座標から $PA^2 = (x + 4)^2 + (y - 1)^2$ 、 $PB^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$ である。共通の $(y - 1)^2$ を消すと、

$$(x + 4)^2 = (x - 2)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 - 4x + 4$$

$$12x = -12$$

$$x = -1$$

逆に、 $x = -1$ の点では PA^2 と PB^2 が等しくなるので $PA = PB$ である。

したがって、求める軌跡は直線 $x = -1$ である。

演習 2 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとる。 $PA = PB$ であることと $PA^2 = PB^2$ であることは同じ意味である。

座標から $PA^2 = x^2 + (y + 2)^2$ 、 $PB^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2$ である。両辺を展開し、共通の $x^2 + y^2$ を消すと、

$$4y + 4 = -8x - 4y + 20$$

$$8x + 8y = 16$$

$$x + y = 2$$

逆に、 $x + y = 2$ を満たす点では $8x + 8y = 16$ が成り立ち、式を逆にたどると $PA^2 = PB^2$ となる。

したがって $PA = PB$ である。

よって、求める軌跡は直線 $x + y = 2$ である。

演習 3 の解答・解説

点 $P(x, y)$ から y 軸までの距離は $|x|$ である。

したがって、条件は $|x| = 3$ であり、 $x = 3$ または $x = -3$ となる。

逆に、 $x = 3$ または $x = -3$ である点は、どちらも y 軸からの距離が 3 である。

したがって、求める軌跡は 2 本の直線 $x = 3$ 、 $x = -3$ である。

演習 4 の解答・解説

点 $P(x, y)$ をとる。

座標から $PA^2 = x^2 + y^2$ 、 $PB^2 = (x - 6)^2 + y^2$ である。和を展開して 26 に等しいとおくと、

$$2x^2 - 12x + 36 + 2y^2 = 26$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 4$$

となる。

逆に、 $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ を満たす点では $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ が成り立つ。この式から $PA^2 + PB^2 = 26$ が得られる。

したがって、求める軌跡は中心 $(3, 0)$ 、半径 2 の円である。

演習 5 の解答・解説

方程式 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ は、中心 $(-1, 2)$ 、半径 3 の円を表す。

点 $P(x, y)$ と固定点 $A(-1, 2)$ の距離について、 $AP = 3$ ならば $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ となる。

逆に、この方程式を満たす点では $AP^2 = 9$ である。距離 AP は 0 以上なので $AP = 3$ となる。

したがって、この方程式が表す軌跡は、固定点 $(-1, 2)$ からの距離が 3 である点すべての集まりである。

演習 6 の解答・解説

点 $A(0, -2)$ 、 $B(4, 2)$ から等距離になる点の軌跡は、演習 2 と同じ計算から直線 $x + y = 2$ である。各点について調べる。

- $(0, 2)$ では $0 + 2 = 2$ なので、 $PA = PB$ を満たす。
- $(1, 0)$ では $1 + 0 = 1$ なので、 $PA = PB$ を満たさない。
- $(3, -1)$ では $3 + (-1) = 2$ なので、 $PA = PB$ を満たす。

したがって、条件 $PA = PB$ を満たす点は $(0, 2)$ と $(3, -1)$ である。