

第 112 講 三角関数の合成

学習目標

この講では、 $a \sin x + b \cos x$ の形を 1 つの正弦関数へまとめる考え方を理解する。
具体的には、次のことができるようになる。

- $a \sin x + b \cos x$ を $R \sin(x + \phi)$ の形へ合成できる。
- $R \cos \phi = a$ 、 $R \sin \phi = b$ から移動角 ϕ を決められる。
- 合成後のグラフや値域を利用して、最大値・最小値を考えられる。

三角関数を合成する理由

a, b は実数とし、まず $a^2 + b^2 > 0$ の場合を考える。この場合は $R = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ として合成角を決められる。 $a = b = 0$ の場合はこの手順で割ることができないため、後で分けて考える。

$\sin x$ と $\cos x$ が別々に含まれる式は、そのままではグラフの形や最大値・最小値を判断しにくい。

そこで、加法定理を逆向きに利用して、1 つの正弦関数へまとめる。

加法定理より、 $\sin(x + \phi) = \sin x \cos \phi + \cos x \sin \phi$ である。

両辺を R 倍すると、 $R \sin(x + \phi) = R \cos \phi \sin x + R \sin \phi \cos x$ となる。

したがって、 $a \sin x + b \cos x$ をこの形に合わせるには、係数を比較して $R \cos \phi = a$, $R \sin \phi = b$ となるように R, ϕ を選べばよい。

ここで、2 つの式を 2 乗して足す。

$$(R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2 = a^2 + b^2$$

$$R^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = a^2 + b^2$$

$$R^2 = a^2 + b^2$$

より、 $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ となる。 R は長さとして扱うため、 $R > 0$ を選ぶ。

角 ϕ は、単位円上の点 $(\cos \phi, \sin \phi) = (\frac{a}{R}, \frac{b}{R})$ を考えて決める。

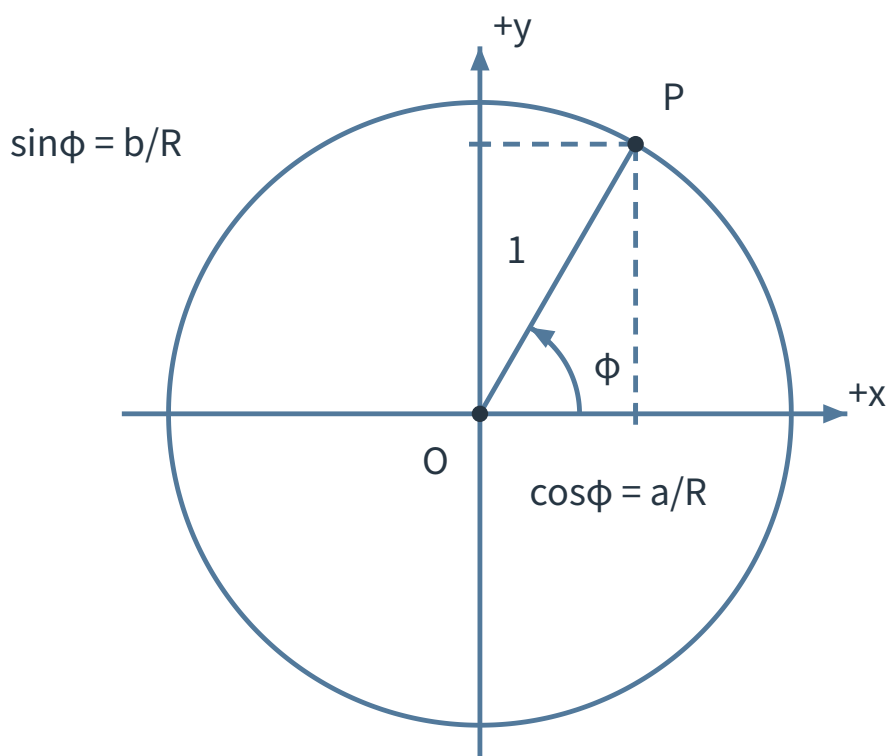


図1 係数を表す単位円（横座標は $\cos \phi$ 、縦座標は $\sin \phi$ ）

この図では、 $\phi = \frac{\pi}{3}$ のときの単位円上の点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を示している。座標の各成分が $\cos \phi$ 、 $\sin \phi$ に対応する。

$\tan \phi = \frac{b}{a}$ だけで決める方法は注意が必要である。正接の値だけでは第1象限か第3象限かのような象限の違いを区別できず、 $a = 0$ の場合には利用できない。そのため、 $\cos \phi$ と $\sin \phi$ の両方を確認する。

また、 $a = b = 0$ の場合は、 $a \sin x + b \cos x = 0$ であり、 R で割る操作はできない。この場合は恒等的に0である。

角の範囲は代表として $-\pi < \phi \leq \pi$ とする。

また、三角関数は周期 2π を持つため、 $\phi + 2k\pi$ としても同じ値を表す。ここで、 k は整数であり、 $k \in \mathbb{Z}$ である。

合成後は必ず加法定理で展開し、元の $\sin x$ 、 $\cos x$ の係数へ戻るか確認する。この確認によって、移動角の符号や象限の間違いを防げる。

R の意味と値域

R は係数の和ではない。 $R = a + b$ ではなく、 $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ で決まる。

また、一般の実数 x に対しては、 $-1 \leq \sin(x + \phi) \leq 1$ より、 $-R \leq R \sin(x + \phi) \leq R$ となるため、値域は $-R$ から R である。

ただし、 x の範囲が制限される場合は注意が必要である。 $x + \phi$ の動く範囲を調べ、最大値・最小値を取る位置が区間内にあるか、端点での値はいくつかを確認する。区間が制限されているのに、常に最大値 R 、最小値 $-R$ と答えてはいけない。

例題 1

$\sin x + \sqrt{3} \cos x$ を $R \sin(x + \phi)$ の形へ合成しなさい。
ただし、 $R > 0$ とし、 $-\pi < \phi \leq \pi$ の範囲で考える。

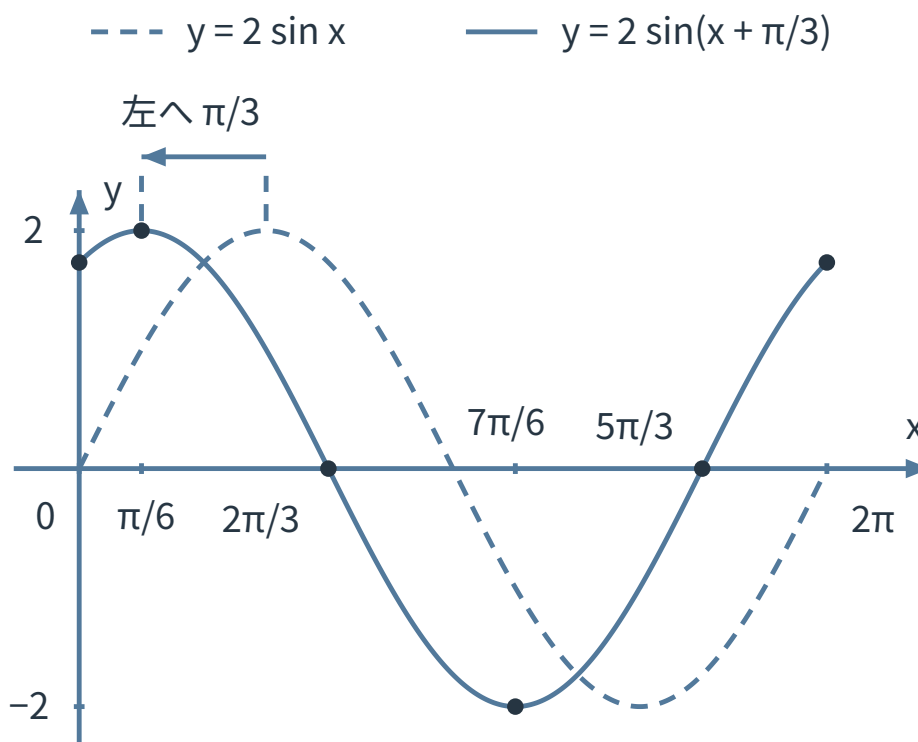


図2 実線 $y = 2 \sin(x + \pi/3)$ と破線 $y = 2 \sin x$ (角度はラジアン)

例題 1 の解答・解説

$a = 1$ 、 $b = \sqrt{3}$ と考える。

まず、 $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ より、次のように計算する。

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

次に、 $R \cos \phi = a$ 、 $R \sin \phi = b$ へ代入すると、 $2 \cos \phi = 1$ 、 $2 \sin \phi = \sqrt{3}$ より、 $\cos \phi = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

単位円でこの点に対応する角は、 $\phi = \frac{\pi}{3}$ である。

したがって、 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ となる。

確認のため加法定理で展開すると、次のように計算する。

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) \\ &= \sin x + \sqrt{3} \cos x \end{aligned}$$

これにより、元の係数へ戻ることが確認できる。

例題 2

$\sqrt{3} \sin x - \cos x$ を $R \sin(x + \phi)$ の形へ合成しなさい。

ただし、 $R > 0$ とし、 $-\pi < \phi \leq \pi$ の範囲で考える。

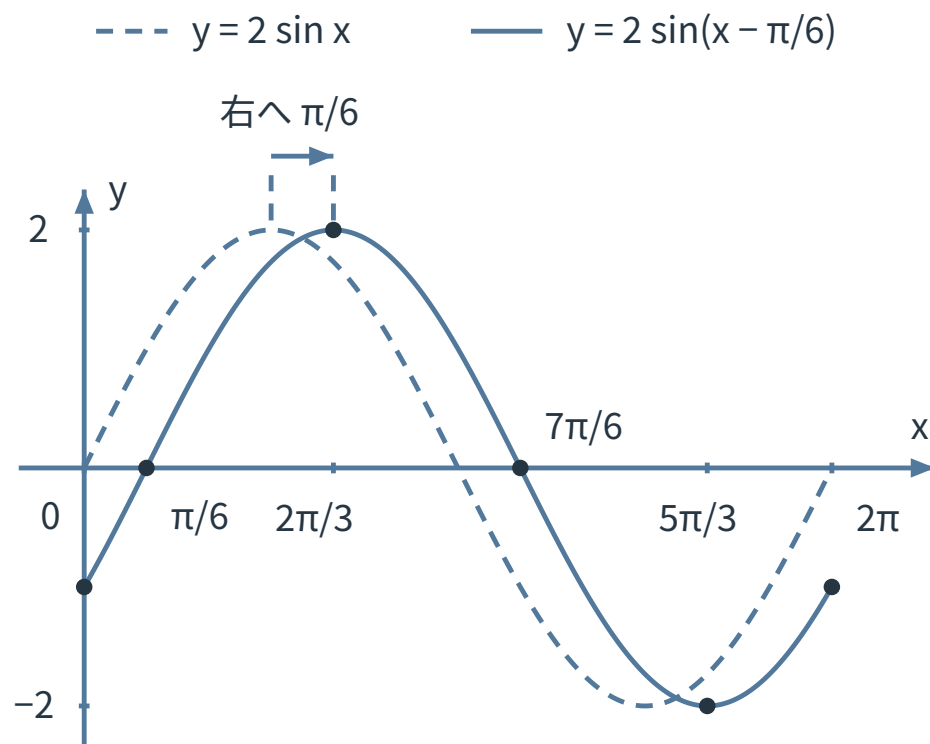


図3 実線 $y = 2 \sin(x - \pi/6)$ と破線 $y = 2 \sin x$ (角度はラジアン)

例題 2 の解答・解説

$a = \sqrt{3}$ 、 $b = -1$ と考える。
まず、次のように計算する。

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

係数比較より、 $2 \cos \phi = \sqrt{3}$ 、 $2 \sin \phi = -1$ となる。

したがって、 $\cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin \phi = -\frac{1}{2}$ である。

この点は第 4 象限にあるため、 $\phi = -\frac{\pi}{6}$ となる。

よって、 $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$ である。

確認すると、次のように計算する。

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x\right) \\ &= \sqrt{3} \sin x - \cos x \end{aligned}$$

$x - \frac{\pi}{6}$ となるため、基準となるグラフ $y = 2 \sin x$ を右へ $\frac{\pi}{6}$ だけ移動した形になる。振幅は 2 のままであり、 $y = \sin x$ の単なる移動ではないことに注意する。

例題 3

$y = \sin x + \cos x$ について、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で最大値・最小値と、それを取る x を求めなさい。

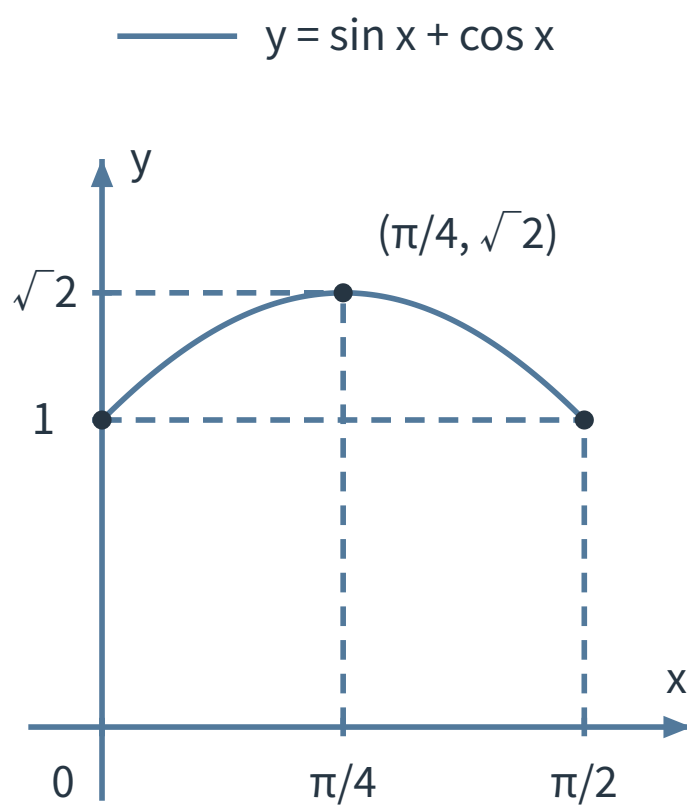


図 4 閉区間 $0 \leq x \leq \pi/2$ のみのグラフ（黒丸は端点を含む代表点）

例題 3 の解答・解説

加法定理の形へ合わせる。

$a = 1, b = 1$ なので、 $R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ となる。

また、 $\sqrt{2} \cos \phi = 1, \sqrt{2} \sin \phi = 1$ より、 $\cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから、 $\phi = \frac{\pi}{4}$ となる。
したがって、 $y = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ である。

ここで、 x の範囲から、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので、 $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ となる。

$t = x + \frac{\pi}{4}$ とおくと、 t の範囲は $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$ である。この範囲では、 $\sin t$ は $t = \frac{\pi}{2}$ まで増加し、その後減少する。最大となるのは x そのものではなく、 $t = x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ を満たすときである。また、最小値は両端

$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ での値を比較して求める。

最大値は、 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ より、 $x = \frac{\pi}{4}$ のときであり、 $y = \sqrt{2}$ となる。

最小値は端点を比較する。

$x = 0$ では、 $y = \sin 0 + \cos 0 = 1$ である。

$x = \frac{\pi}{2}$ では、 $y = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$ である。

したがって、最小値は 1 であり、 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ で取る。

一般の実数範囲なら値域は $-\sqrt{2}$ から $\sqrt{2}$ まで広がるが、今回は区間が $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限されているため、その範囲内だけで調べる必要がある。

演習問題

演習問題 1

$2 \sin x + 2 \cos x$ を $R \sin(x + \phi)$ の形へ合成しなさい。
ただし、 $R > 0, -\pi < \phi \leq \pi$ とする。

演習問題 2

$-\sin x + \sqrt{3} \cos x$ を $R \sin(x + \phi)$ の形へ合成しなさい。
ただし、 $R > 0, -\pi < \phi \leq \pi$ とする。
また、 $\tan \phi$ だけを利用して ϕ を決めることがなぜ不十分か説明しなさい。

演習問題 3

$a \sin x + b \cos x$ を $R \sin(x + \phi)$ の形へ合成する。
ただし、 a, b は実数で、 $a = 0, b \neq 0$ の場合を考える。
 R と ϕ をどのように決めればよいか説明しなさい。

演習問題 4

$3 \sin x - 4 \cos x$ の値域を、 x がすべての実数を動く場合について求めなさい。
また、 R を求めるときに $3 + (-4)$ と考えてはいけない理由を説明しなさい。

演習問題 5

$y = \sin x - \cos x$ について、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で最大値・最小値と、それを取る x をすべて求めなさい。

演習問題 6

$a \sin x + b \cos x$ において、 $a = b = 0$ の場合を考える。

この場合に、通常の三角関数の合成手順である $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ を求め、 $R \cos \phi = a$ 、 $R \sin \phi = b$ から ϕ を決める方法が使えない理由を説明しなさい。

また、 $R > 0$ の条件を外して $R = 0$ を許せば $0 \sin(x + \phi)$ と表せること、このとき ϕ は一意に決まらないことを説明しなさい。

元の式の値も求めなさい。

演習問題 7

$2 \sin x - \sqrt{3} \cos x$ を $R \sin(x + \phi)$ の形へ合成しなさい。

ただし、 $R > 0$ 、 $-\pi < \phi \leq \pi$ とする。

また、 ϕ の代わりに $\phi + 2k\pi$ と書けることを示し、そのときの k の条件を答えなさい。

演習問題 8

$y = 2 \sin x + \cos x$ について、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ の範囲で最大値・最小値を求めなさい。

合成後の角の範囲を調べて答えなさい。

演習問題の解答・解説**演習問題 1 の解答・解説**

係数比較を利用する。

$a = 2$ 、 $b = 2$ なので、 $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ より、次のように計算する。

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

また、 $2\sqrt{2} \cos \phi = 2$ 、 $2\sqrt{2} \sin \phi = 2$ より、 $\cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

したがって、 $\phi = \frac{\pi}{4}$ となる。

よって、 $2 \sin x + 2 \cos x = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ である。

係数の和 $2 + 2$ ではなく、2 つの係数を直角方向の成分として考え、平方和の平方根で長さを求めることがポイントである。

演習問題 2 の解答・解説

$a = -1$ 、 $b = \sqrt{3}$ と考える。
まず、次のように計算する。

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

係数比較より、 $2 \cos \phi = -1$ 、 $2 \sin \phi = \sqrt{3}$ となるから、 $\cos \phi = -\frac{1}{2}$ 、 $\sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。
この点は第 2 象限にあるため、 $\phi = \frac{2\pi}{3}$ となる。

したがって、 $-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ である。

$\tan \phi$ だけを見ると、 $\tan \phi = -\sqrt{3}$ となる。しかし、同じ値を持つ角は第 2 象限と第 4 象限に存在するため、これだけでは象限を決定できない。

さらに、 $a = 0$ の場合は $\tan \phi$ の分母が 0 となるため利用できない。したがって、 $\cos \phi$ と $\sin \phi$ の両方を確認する必要がある。

演習問題 3 の解答・解説

$a = 0$ 、 $b \neq 0$ の場合を考える。

一般式 $a \sin x + b \cos x = R \sin(x + \phi)$ では、 $R \cos \phi = a$ 、 $R \sin \phi = b$ である。

ここで $a = 0$ なので、 $\cos \phi = 0$ となる。

また、 $R = \sqrt{0^2 + b^2}$ より、 $R = |b|$ である。

$b > 0$ の場合は、 $\sin \phi = 1$ となるので、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ を選べる。

$b < 0$ の場合は、 $\sin \phi = -1$ となるので、 $\phi = -\frac{\pi}{2}$ を選べる。

したがって、 $a = 0$ の場合でも係数比較によって決定できるが、 $\tan \phi$ は利用できない。

演習問題 4 の解答・解説

$a = 3$ 、 $b = -4$ と考える。

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

したがって、 $3 \sin x - 4 \cos x = 5 \sin(x + \phi)$ と表せる。

x がすべての実数を動くとき、 $-1 \leq \sin(x + \phi) \leq 1$ なので、 $-5 \leq y \leq 5$ となる。

R は係数の大きさを組み合わせた結果であり、 $3 + (-4) = -1$ ではない。正弦成分と余弦成分は互いに直交する方向の成分として扱うため、平方和で求める。

演習問題 5 の解答・解説

合成すると、 $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ となる。

ここで、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ である。

$t = x - \frac{\pi}{4}$ とおくと、 t の範囲は $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ となる。この範囲では単位円上で角が増加すると正弦の高さも増加するため、 $\sin t$ は単調に増加する。

したがって、最小値は左端 $t = -\frac{\pi}{4}$ 、最大値は右端 $t = \frac{\pi}{4}$ で取る。

$t = -\frac{\pi}{4}$ は、 $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ より、 $x = 0$ である。このとき、 $y = \sin 0 - \cos 0 = -1$ となる。

また、 $t = \frac{\pi}{4}$ は、 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ より、 $x = \frac{\pi}{2}$ である。このとき、 $y = \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = 1$ となる。

したがって、最小値は -1 で $x = 0$ のとき、最大値は 1 で $x = \frac{\pi}{2}$ のときに取る。

区間が制限されている場合は、合成後の角の範囲を調べ、その範囲での正弦の変化を確認することが重要である。

演習問題 6 の解答・解説

$a = b = 0$ の場合、 $a \sin x + b \cos x = 0$ であり、元の式はすべての x で 0 である。

通常の場合では、 $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ を求め、 $R \cos \phi = a$, $R \sin \phi = b$ から $\cos \phi$ と $\sin \phi$ を決める。

しかし、この場合は、 $R = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ となるため、 $\cos \phi = \frac{a}{R}$, $\sin \phi = \frac{b}{R}$ のように R で割る操作ができない。

したがって、 $R > 0$ を前提とする通常の場合の手順は利用できない。

ただし、 $R = 0$ を許せば、 $0 \sin(x + \phi)$ と表すことはできる。この式はどのような ϕ を選んでも常に 0 になるため、 ϕ は一意に決まらない。

よって、この場合は合成角を求めるのではなく、元の式が恒等的に 0 であることを確認する。

演習問題 7 の解答・解説

$a = 2$, $b = -\sqrt{3}$ である。

まず、次のように計算する。

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{2^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

係数比較より、 $\sqrt{7} \cos \phi = 2$, $\sqrt{7} \sin \phi = -\sqrt{3}$ なので、 $\cos \phi = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\sin \phi = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ となる。

この角は第 4 象限にあるため、代表範囲 $-\pi < \phi \leq \pi$ では、その条件を満たす角を選ぶ。

よって、 $2 \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{7} \sin(x + \phi)$ となる。

また、三角関数は周期 2π を持つため、 $\phi + 2k\pi$ としても同じ値を表す。

ここで、 k は整数である。

つまり、 $k \in \mathbb{Z}$ である。

演習問題 8 の解答・解説

$a = 2$, $b = 1$ なので、 $R = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ である。

係数比較より、 $\sqrt{5} \cos \phi = 2$, $\sqrt{5} \sin \phi = 1$ となる。

したがって、 $\cos \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ であり、 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ である。

よって、 $y = \sqrt{5} \sin(x + \phi)$ となる。

ここで、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ より、 $-\frac{\pi}{2} + \phi \leq x + \phi \leq \phi$ である。

$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ なので、この範囲は $-\frac{\pi}{2} < x + \phi < \frac{\pi}{2}$ に含まれる。

$t = x + \phi$ とおくと、 t は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の範囲を動く。この範囲では単位円上で正弦の高さが角の増加とともに増えるため、 $\sin t$ は単調に増加する。

したがって、最大値は t が最大となる端点 $x = 0$ で取る。

このとき、 $y = 2 \sin 0 + \cos 0 = 1$ である。

最小値は t が最小となる端点 $x = -\frac{\pi}{2}$ で取る。

このとき、 $y = 2 \sin(-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{2}) = -2$ である。

したがって、最大値は 1 で $x = 0$ のとき、最小値は -2 で $x = -\frac{\pi}{2}$ のとき取る。

区間付き最大最小では、単に値域 $-\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$ を使うのではなく、合成後の角の範囲での変化を確認する。