

## 第 58 講 同じものを含む順列

### 学習目標

- 同じものを含む並べ方では、入れ替えても同じ並びになる場合があることを説明できる。
- いったんすべてを区別して並べたあと、重複して数えた分を割る考え方を理解できる。
- $n$  個のうち同じものがそれぞれ  $p$  個、 $q$  個、…あるときの並べ方を求められる。
- $\frac{n!}{p!q!\cdots}$  の分母が何を表しているか説明できる。

## 異なるものの順列との違い

### 入れ替えても見た目が変わらない

前講では、並べるものはすべて異なっていました。  
たとえば、異なる 3 文字  $A, B, C$  をすべて並べると、

- $ABC$
- $ACB$
- $BAC$
- $BCA$
- $CAB$
- $CBA$

の 6 通りでした。

これは、

$$3! = 6$$

と求められます。

では、3 文字が  $A, A, B$  だったらどうでしょうか。

2 つの  $A$  は同じ文字なので、この 2 つの  $A$  だけを入れ替えても、見た目は変わりません。

実際の並びは、

- $AAB$
- $ABA$
- $BAA$

の 3 通りです。

すべて異なる 3 個を並べるときの  $3! = 6$  通りより少なくなります。

### 同じものの入れ替えは新しい並びを作らない

同じものどうしを入れ替えても、実際の並びは変わりません。

そのため、いったんすべて異なるものとして数えると、同じ並びを何度も重複して数えることになります。

## なぜ重複した分を割るのか

### 同じ $A$ に仮の名前をつけて考える

$A, A, B$  の 2 つの  $A$  を、いったん  $A_1, A_2$  と区別してみます。

すると、異なる 3 個  $A_1, A_2, B$  の並べ方は、

$$3! = 6$$

通りです。

たとえば、見た目が  $AAB$  になるものには、

- $A_1 A_2 B$
- $A_2 A_1 B$

の 2 通りがあります。

しかし、 $A_1, A_2$  の区別を取り去れば、どちらも同じ  $AAB$  です。

同じことが  $ABA$ 、 $BAA$  についても起こります。

つまり、実際の 1 つの並びを、2 つの  $A$  の並べ替えで、

$$2!$$

回ずつ数えていることになります。

したがって、

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

とすれば、本当に異なる並びの数になります。

### 重複を割る考え方

同じものを含む並べ方では、

1. いったん全部を異なるものとして並べる。
2. 同じものどうしを区別したために生じた重複の数を調べる。
3. その重複分で割る。

と考えます。

## 同じものが 1 種類ある場合

### 同じものが $p$ 個あるとき

全部で  $n$  個のものを並べ、そのうち同じものが  $p$  個あるとします。

全部を異なるものと考えたと、

$$n!$$

通りです。

しかし、同じ  $p$  個は互いに入れ替えても並びが変わりません。

その  $p$  個だけの並べ方は、

$$p!$$

通りです。

つまり、実際の 1 つの並びを  $p!$  回ずつ重複して数えています。

したがって、本当に異なる並べ方は、

$$\frac{n!}{p!}$$

通りです。

### AABC を並べる

$A, A, B, C$  の 4 文字をすべて一列に並べます。

全部を区別すれば  $4!$  通りですが、2 つの  $A$  の入れ替えによる  $2!$  通りは同じ並びです。

したがって、並べ方は、

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

通りです。

## 同じものが 2 種類以上ある場合

### それぞれの重複を割る

今度は  $A, A, B, B, C$  の 5 文字を並べます。

まず、5 個すべてを異なるものとして考えると、

$$5!$$

通りです。

2 つの  $A$  は入れ替えても同じなので、2! 回ずつ重複しています。

さらに、2 つの  $B$  も入れ替えても同じなので、そこでも 2! 回ずつ重複しています。

したがって、

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!}$$

とします。

計算すると、

$$\frac{120}{2 \cdot 2} = 30$$

なので、30 通りです。

### 同じものを含む順列

全部で  $n$  個のものがあ、その中に同じものがそれぞれ  $p$  個、 $q$  個、…含まれているとします。

ただし、 $p + q + \dots = n$  とします。

このとき、すべてを一行に並べる方法の数は、

$$\frac{n!}{p!q!\dots}$$

です。

### 分母は重複した回数

公式、

$$\frac{n!}{p!q!\dots}$$

では、

- $n!$ : 全部を異なるものとして並べた数
  - $p!$ : 同じもの  $p$  個の入れ替えによる重複
  - $q!$ : 別の同じもの  $q$  個の入れ替えによる重複
- を表しています。

分母は「同じものが何個あるか」に対応しています。

### 同じものの個数そのものではなく階乗で割る

同じものが 3 個あるからといって、単に 3 で割るのではありません。  
3 個の同じものを区別したときの並べ替えは、

$$3! = 6$$

通りあります。

したがって、同じものが 3 個なら  $3!$  で割ります。

## 公式を使う手順

### 同じものを含む順列の解き方

1. 全部で何個あるか数える。
2. 同じものが何個ずつあるか調べる。
3. 全部を異なるものとして  $n!$  とする。
4. 同じものが  $p$  個なら  $p!$ 、 $q$  個なら  $q!$  で割る。
5. 必要なら小さな場合を列挙して検算する。

### 何を分母へ入れるか確認する

$A, A, A, B, B, C$  の 6 文字なら、

- 全部で 6 個
- $A$  が 3 個
- $B$  が 2 個
- $C$  が 1 個

です。

したがって、

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

とします。

$C$  は 1 個だけなので、並べ替えによる重複はありません。

$1! = 1$  なので、分母へ書いても値は変わりません。

### 同じ文字の位置を区別しない

$A, A, B$  について、

「左側の  $A$  と右側の  $A$  は別のもの」

とは考えません。

同じものを含む順列では、同じ記号・同じ種類のものは区別しないという条件で数えます。

## すべて同じものなら 1 通り

### 公式の意味を極端な例で確かめる

$A, A, A, A$  の 4 文字を並べるとします。

どの  $A$  をどこへ置いても、完成する並びは、

AAAA

だけです。

公式でも、

$$\frac{4!}{4!} = 1$$

となります。

同じものが増えるほど、入れ替えても変わらない並びが増えるため、異なる並べ方の数は少なくなります。

## 例題

### 例題 1

文字  $A, A, B, B$  の 4 文字をすべて一列に並べます。  
異なる並べ方は何通りありますか。

### 例題 1 の解答・解説

全部で 4 文字あります。

$A$  が 2 個、 $B$  が 2 個あるので、

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

を計算します。

したがって、

$$\frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

より、6 通りです。

実際に列挙すると、

$AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA$

の 6 通りです。

### 例題 2

文字  $A, A, A, B, C$  の 5 文字をすべて一列に並べます。  
異なる並べ方は何通りありますか。

### 例題 2 の解答・解説

全部で 5 文字あり、 $A$  が 3 個あります。

すべてを区別して並べた  $5!$  通りの中では、3 個の  $A$  の入れ替えによって同じ並びを  $3!$  回ずつ数えています。

したがって、

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

より、20 通りです。

**例題 3**

赤いカードが 3 枚、青いカードが 2 枚、白いカードが 1 枚あります。  
同じ色のカードは区別しないものとして、6 枚すべてを一行に並べる方法は何通りありますか。

**例題 3 の解答・解説**

全部で 6 枚あります。

同じものは、

- ・ 赤が 3 枚
- ・ 青が 2 枚
- ・ 白が 1 枚

です。

したがって、

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

を計算します。

$$\frac{720}{6 \cdot 2} = 60$$

なので、60 通りです。

**演習問題****練習問題 1**

文字  $A, A, B$  の 3 文字をすべて一行に並べます。  
異なる並べ方は何通りありますか。

**練習問題 2**

文字  $A, A, B, B$  の 4 文字をすべて一行に並べます。  
公式を使って異なる並べ方の数を求めなさい。

**練習問題 3**

文字  $A, A, A, B, C$  の 5 文字をすべて一行に並べます。  
異なる並べ方は何通りありますか。

**練習問題 4**

文字  $A, A, B, B, C$  の 5 文字をすべて一行に並べます。  
異なる並べ方は何通りありますか。

**練習問題 5**

文字  $A, A, A, B, B, C$  の 6 文字をすべて一列に並べます。  
異なる並べ方は何通りありますか。

**練習問題 6**

赤い札が 2 枚、青い札が 2 枚、緑の札が 1 枚あります。  
同じ色の札は区別しないものとして、5 枚すべてを一列に並べる方法は何通りありますか。

**練習問題 7**

文字  $A, A, A, B, B, B$  の 6 文字をすべて一列に並べます。  
異なる並べ方は何通りありますか。

**練習問題 8**

ある生徒は、文字  $A, A, B, B, C$  の並べ方について、

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

と計算しました。  
この計算の誤りを説明し、正しい並べ方の数を求めなさい。

**練習問題 9**

次の 2 つについて、異なる並べ方の数をそれぞれ求めなさい。

(1)  $A, A, B, C$

(2)  $A, A, B, B$

また、(1)と(2)で並べ方の数が異なる理由を、「同じものの入れ替え」と「重複」という言葉を使って説明しなさい。

## 演習問題の解答・解説

### 練習問題 1 の解答・解説

全部で 3 文字あり、 $A$  が 2 個あります。  
したがって、

$$\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

より、3 通りです。  
実際には  $AAB, ABA, BAA$  の 3 通りです。

**練習問題 2 の解答・解説**

---

全部で 4 文字あり、 $A$  が 2 個、 $B$  が 2 個あります。  
したがって、

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

より、6 通りです。

**練習問題 3 の解答・解説**

---

全部で 5 文字あり、 $A$  が 3 個あります。  
したがって、

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

より、20 通りです。

**練習問題 4 の解答・解説**

---

全部で 5 文字あり、 $A$  が 2 個、 $B$  が 2 個あります。  
したがって、

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30$$

より、30 通りです。

**練習問題 5 の解答・解説**

---

全部で 6 文字あり、 $A$  が 3 個、 $B$  が 2 個あります。  
したがって、

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{12} = 60$$

より、60 通りです。

**練習問題 6 の解答・解説**

---

全部で 5 枚あり、赤が 2 枚、青が 2 枚あります。  
同じ色の札は区別しないので、

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30$$

より、30 通りです。

**練習問題 7 の解答・解説**

---

全部で 6 文字あり、 $A$  が 3 個、 $B$  が 3 個あります。  
したがって、

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20$$

より、20 通りです。

### 練習問題 8 の解答・解説

---

$A$  が 2 個あるので  $2!$  で割るだけでなく、 $B$  も 2 個あるので、 $B$  の入れ替えによる重複についても  $2!$  で割る必要があります。  
したがって、正しい式は、

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!}$$

です。  
計算すると、

$$\frac{120}{4} = 30$$

より、30 通りです。

### 練習問題 9 の解答・解説

---

(1) は全部で 4 文字あり、 $A$  が 2 個なので、

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

より、12 通りです。

(2) は  $A$  が 2 個だけでなく、 $B$  も 2 個あるので、

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

より、6 通りです。

(2) では、 $A$  どちらの入れ替えに加えて  $B$  どちらの入れ替えでも見た目が変わりません。  
そのため、全部を異なるものとして数えたときの重複が (1) より多くなり、異なる並べ方の数は少なくなります。