第 257 講 1 の累乗根

学習目標

- 方程式 $z^n = 1$ の解をド・モアブルの定理から導ける。
- n 個の解を $\cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{k}{n}\right)$（$k = 0, 1, \ldots, n-1$）と表せる。
- 解が単位円上に等間隔で並び、$n \geq 3$ では正 n 角形の頂点になることを説明できる。
- 解の周期性、共役、和や積などの性質を用いて計算できる。

1. $z^n = 1$ を絶対値と偏角に分ける

右辺の 1 を極形式で読む

n を正の整数とし、$z^n = 1$ を考える。$z = 0$ は解でないので、$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$）とおける。ド・モアブルの定理から、

$$z^n = r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\}$$

である。一方、1 は偏角を 2π の整数倍だけ変えて

$$1 = \cos(2\pi m) + i\sin(2\pi m) \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

と表せる。したがって、絶対値と偏角を比べると

$$r^n = 1, \qquad n\theta = 2\pi m$$

を得る。$r > 0$ かつ n は正の整数なので $r = 1$ であり、$\theta = 2\pi\frac{m}{n}$ となる。

1 の n 乗根

n を正の整数とする。方程式 $z^n = 1$ の解は

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

であり、相異なる解はちょうど n 個である。

解が過不足なく n 個であることの証明

上の議論から、すべての解は $m \in \mathbb{Z}$ を用いて $\cos\left(2\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{m}{n}\right)$ と表せる。整数 m を n で割り、$m = qn + k$（$0 \leq k \leq n-1$）とすると、

$$\frac{2\pi m}{n} = 2\pi q + \frac{2\pi k}{n}$$

なので、この値は z_k と同じ複素数を表す。逆に各 z_k はド・モアブルの定理により $z_k^n = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1$ を満たす。
さらに $0 \leq j < k \leq n-1$ なら $0 < 2\pi\frac{k-j}{n} < 2\pi$ であり、二つの偏角の差は 2π の整数倍でない。したがって $z_j \neq z_k$ である。以上より、相異なる解はちょうど n 個である。

例題 1：$z^4 = 1$ を解く

方程式 $z^4 = 1$ を解け。

例題 1 の解答・解説

$k=0,1,2,3$ として $z_k=\cos\left(2\pi\frac{k}{4}\right)+i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right)$ を求めればよい。よって、

$$z=1,\ i,\ -1,\ -i$$

である。いずれも 4 乗すると 1 になる。

2. 解は単位円を等分する

偏角の差が一定である

すべての解 z_k の絶対値は 1 なので、解は単位円上にある。$z_n=z_0$ とみなすと、隣り合う z_k と z_{k+1} の中心角は、円を一周する最後の組も含めて常に $2\frac{\pi}{n}$ である。したがって、解は単位円周を n 等分する。

$n\geq 3$ のとき、n 個の解を順に結ぶと、中心が原点で一つの頂点が 1 にある正 n 角形ができる。$n=1$ では解は 1 のみ、$n=2$ では解は $1,-1$ の 2 点であるため、正多角形という表現は用いない。

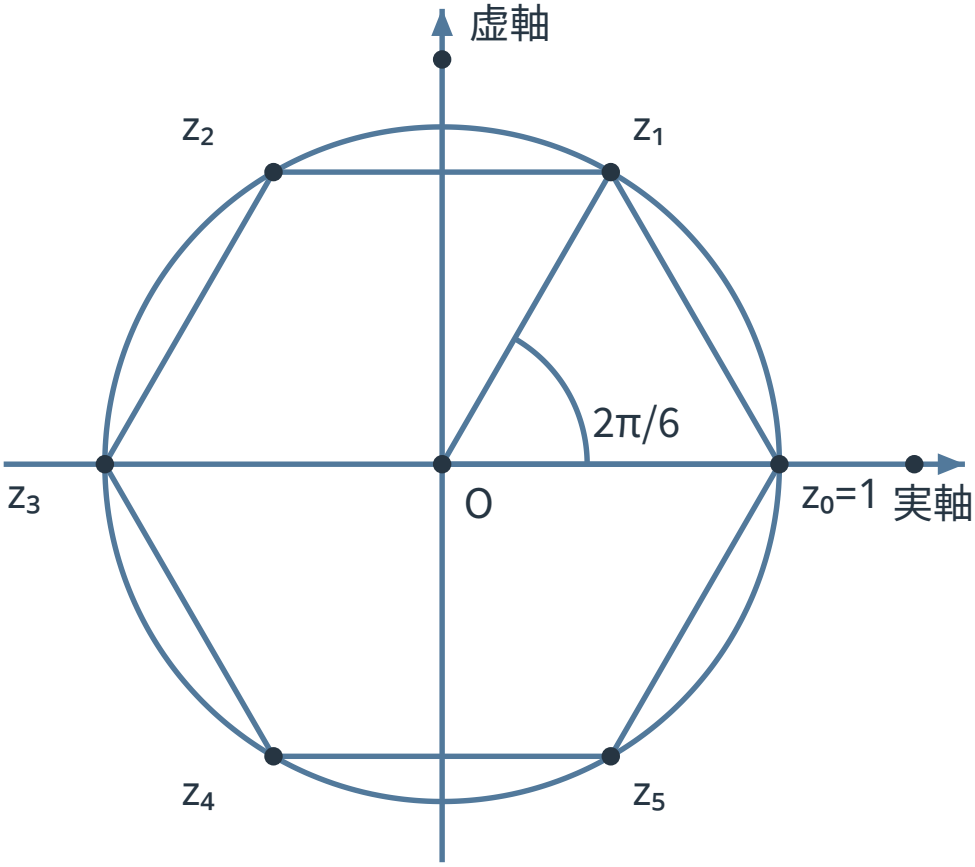

図 1　$z^6=1$ の 6 個の解は単位円上で正六角形の頂点になる

例題 2：$z^6 = 1$ の解を求める

方程式 $z^6 = 1$ の解を $a + bi$ の形で表せ。

例題 2 の解答・解説

偏角は $0, \frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}, \pi, 4\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}$ である。したがって、

$$z = 1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。これらは単位円上に等間隔で並ぶ。

3. 一つの解を繰り返し掛けて全体を得る

基本となる解を ω とおく

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

とおく。ド・モアブルの定理により、$z_k = \omega^k$ である。したがって解全体は

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

と書ける。また $\omega^n = 1$ なので、整数 a, b について $a - b$ が n の倍数なら $\omega^a = \omega^b$ である。指数は n を法として整理できる。

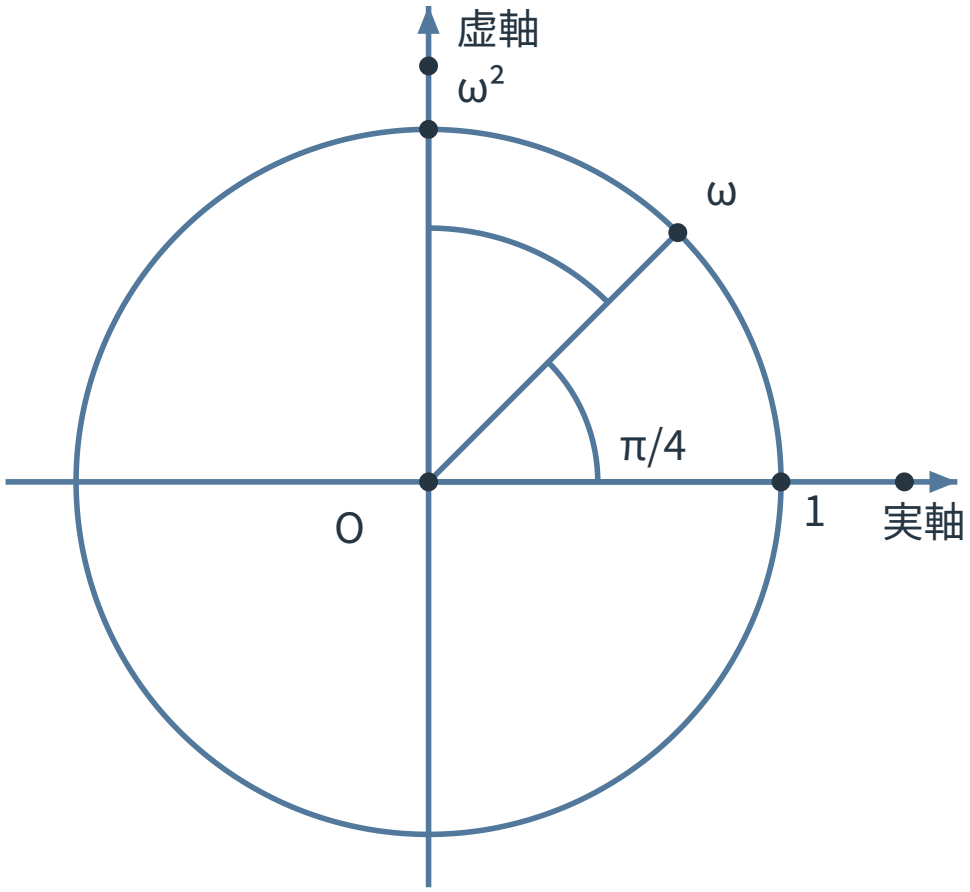

図 2　$n=8$ の例。ω を掛けるたびに偏角が $\frac{\pi}{4}$ だけ増え、次の解へ移る

例題 3：指数を整理する

$\omega=\cos\left(2\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(2\frac{\pi}{7}\right)$ とする。ω^{100} を $1,\omega,\ldots,\omega^{6}$ のいずれかで表せ。

例題 3 の解答・解説

$\omega^{7}=1$ であり、$100=14\cdot 7+2$ なので、

$$\omega^{100}=\left(\omega^{7}\right)^{14}\omega^{2}=\omega^{2}$$

である。

4. 対称性と和・積

共役な解が対になり、全体の和は 0 になる

z_0 の共役複素数は z_0 自身である。また $1\le k\le n-1$ のとき、

$$\overline{z_k}=\cos\left(-\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi k}{n}\right)=z_{n-k}$$

である。よって実軸にない解は実軸について対称な組になる。
$n \geq 2$ とし、$S = 1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}$ とおく。$\omega \neq 1$ なので、等比数列の和から

$$S = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$$

である。したがって $n \geq 2$ では $z^n = 1$ の全解の和は 0 である。また $z^n - 1$ の定数項を根の積と比べると、全解の積は $(-1)^{n+1}$ である。

性質を使う条件を確認する

全解の和が 0 という性質は $n \geq 2$ で用いる。$n = 1$ では唯一の解は 1 であり、その和も積も 1 である。正多角形の見方は $n \geq 3$ で用いる。

例題 4：3 乗根の和と積

1 の 3 乗根のうち 1 でないものを α, β とする。$\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を求めよ。

例題 4 の解答・解説

3 個の解 $1, \alpha, \beta$ の和は 0 なので、$1 + \alpha + \beta = 0$ より

$$\alpha + \beta = -1$$

である。また全解の積は $(-1)^4 = 1$ なので、$1 \cdot \alpha\beta = 1$ より

$$\alpha\beta = 1$$

である。

5. 演習

演習 1：5 乗根の表示

方程式 $z^5 = 1$ の解を極形式で表せ。

演習 2：8 乗根から実数解を選ぶ

方程式 $z^8 = 1$ の解のうち、実数であるものをすべて求めよ。

演習 3：角度と正多角形

$z^9 = 1$ の各解の偏角を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で選び、その値の小さい順に並べる。隣り合う 2 点と原点がつくる中心角を求め、解を順に結んでできる図形を答えよ。

演習 4：基本となる解の累乗

$\omega = \cos\left(2\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(2\frac{\pi}{5}\right)$ とする。ω^{23} を簡単にせよ。

©ミライコーチング

演習 5：共役な解

$z=\cos\left(4\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(4\frac{\pi}{7}\right)$ とする。$\overline{z}$ を 1 の 7 乗根 z_k の形で表せ。

演習 6：全解の和と積

方程式 $z^{10}=1$ の全解の和と積を求めよ。

演習 1 の解答・解説

$k=0,1,2,3,4$ として、

$$z=\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)$$

である。これで相異なる 5 個の解をすべて表している。

演習 2 の解答・解説

解は $z_k=\cos\left(2\pi\frac{k}{8}\right)+i\sin\left(2\pi\frac{k}{8}\right)$ である。実数となるには虚部が 0、すなわち $\sin\left(2\pi\frac{k}{8}\right)=0$ が必要である。$k=0,4$ が該当するので、

$$z=1,-1$$

である。

演習 3 の解答・解説

隣り合う解の偏角の差は

$$\frac{2\pi}{9}$$

である。$9\geq 3$ なので、9 個の解を順に結ぶと、中心が原点で一つの頂点が 1 にある正九角形ができる。

演習 4 の解答・解説

$\omega^5=1$ であり、$23=4\cdot 5+3$ なので、

$$\omega^{23}=\left(\omega^5\right)^4\omega^3=\omega^3$$

である。

演習 5 の解答・解説

$z=z_2$ である。共役をとると偏角の符号が反対になるので、

$$\overline{z}=\cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)=z_5$$

である。

©ミライコーチング

演習 6 の解答・解説

$10 \geq 2$ なので全解の和は 0 である。全解の積は

$$(-1)^{10+1} = -1$$

である。

解を列挙するときの確認事項

- n は正の整数であり、添字は $k = 0, 1, ..., n-1$ とする。
- $k = n$ は $k = 0$ と同じ解になるため、重ねて数えない。
- 解の絶対値はすべて 1 であり、隣り合う偏角の差は $2\frac{\pi}{n}$ である。
- 正 n 角形という見方は $n \geq 3$ の場合に限る。