

第 114 講 三角不等式

学習目標

この講では、三角関数の不等式について、等式の解を求めるだけでなく、その角の間で三角関数の値が基準値より上か下かを判断し、正しい解の範囲を選べるようになることを目標とする。具体的には、次のことができるようになる。

- $\sin x$ 、 $\cos x$ の不等式を単位円上の縦座標・横座標と結び付けて考えられる。
- 等号を含む不等式と、含まない不等式で境界の扱いを区別できる。
- 指定された範囲 $0 \leq x < 2\pi$ の端点条件を確認し、解として含めるか判断できる。
- $\tan x$ の不等式で、定義されない角を除き、連続する枝ごとに解を考えられる。

三角不等式を解く考え方

三角不等式では、最初から公式を当てはめるのではなく、「どの角で基準値と一致するか」と「その間でグラフが基準線より上か下か」を調べることが重要である。

例えば、 $\sin x$ は単位円上の点の縦座標である。したがって、 $\sin x \geq a$ は「縦座標が a 以上になる位置」を探す問題になる。 $\cos x$ は横座標なので、 $\cos x \geq a$ や $\cos x < a$ は「横座標の条件」として考えることができる。

三角不等式の基本的な流れは次の通りである。

1. まず等式 $\sin x = a$ 、 $\cos x = a$ 、 $\tan x = a$ を解き、基準値と一致する角を求める。さらに、 $\tan x$ では $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ のような未定義点も区切りとして確認する。
2. 求めた境界や未定義点によって区切られた各小区間について、その区間内で関数が連続していることを確認する。その上で、基準線と交わらない小区間では代表値を 1 つ選び、不等号が成り立つ側を判断する。 $\tan x$ の場合は極を跨ぐ区間を 1 つの枝として扱ってはいけない。
3. 等号を含むかどうかを確認して、解の端点を決める。ただし、境界の角が必ず符号の切り替わりになるとは限らない。例えば指定区間 $0 \leq x < 2\pi$ で $\sin x \geq 1$ を考えると、 $\sin x = 1$ となる接する境界は $x = \frac{\pi}{2}$ だけであり、その 1 点だけが解になる。このような場合も境界を飛ばさず、値域やグラフの形を確認する必要がある。一般の実数範囲では周期的に同じ値をとるため、指定区間と分けて考える必要がある。

また、 $\sin x$ と $\cos x$ の値域は $-1 \leq \sin x \leq 1$ 、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ である。基準値がこの範囲外なら、境界を 2 つ作る考え方は使えない。例えば、 $\sin x > 2$ は解なし、 $\cos x \leq 2$ は全ての角が解になる。指定区間が $0 \leq x < 2\pi$ の場合、 0 は含むが 2π は含まない。この条件は三角関数の周期とは別に確認する必要がある。

三角不等式の判断軸

$\geq$ や $\leq$ の場合は、等式を満たす境界の角を解に含める。 $>$ や $<$ の場合は、境界の角を解に含めない。

ただし、指定区間の端点は別に確認する必要がある。例えば $x = 0$ が条件を満たせば解に含まれるが、 $x = 2\pi$ は指定区間に含まれていないため解には含まれない。

$\tan x$ では、 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k は整数) で定義されない。正接は各連続した枝の中では増加するが、極をまたいで 1 つの増加関数として扱ってはいけない。

不等式変形での注意

三角関数を含む式で、未知の符号を持つ $\cos x$ などを掛けたり割ったりするときは注意が必要である。

負の数を掛けたり割ったりすると不等号の向きが変わるため、符号が確定していない量で無断に除算してはいけない。0 の場合も別に確認する必要がある。

三角不等式では、まず角の範囲と三角関数の値の関係を見ることが基本である。

例題 1

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。

$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$

例題 1 の解答・解説

境界となる角を求めるため、まず $\sin x = \frac{1}{2}$ を考える。

$0 \leq x < 2\pi$ では、 $\sin x = \frac{1}{2}$ となる角は $x = \frac{\pi}{6}$ 、 $x = \frac{5\pi}{6}$ である。

この 2 つの角が、基準値 $\frac{1}{2}$ と一致する境界になる。

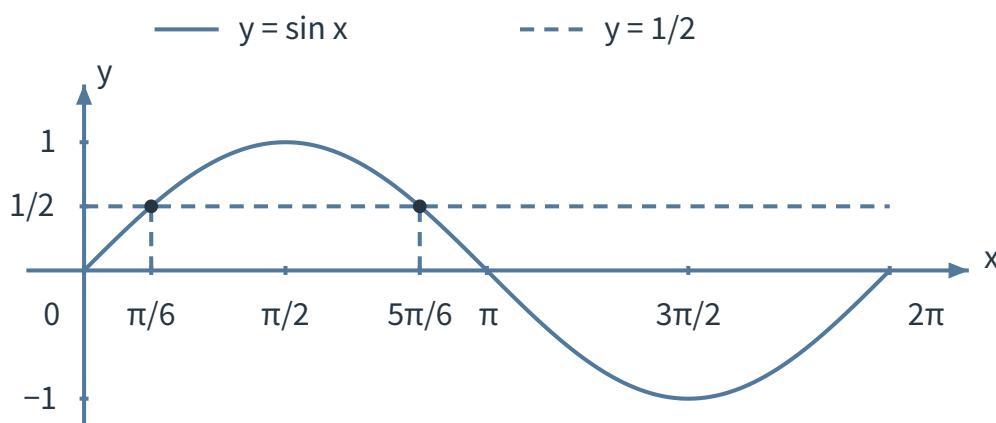


図1 $0 \leq x < 2\pi$ で $\sin x \geq 1/2$ 。解は $[\pi/6, 5\pi/6]$ (両端を含む)。 2π は範囲に含めない。

$\sin x$ は単位円の縦座標であるため、縦座標が $\frac{1}{2}$ 以上になるのは、第 1 象限から第 2 象限にかけての部分である。

境界の間にある代表値として $x = \frac{\pi}{2}$ を調べると、 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ であり、 $\frac{1}{2}$ 以上になる。

また、不等式は $\geq$ であるため、境界の角も解に含める。

したがって、解は $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ である。

一般の実数 x へ広げる場合は、この区間を周期ごとに移動させて考え、 k を整数として $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ と表せる。

例題 2

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。

$$\cos x > -\frac{1}{2}$$

例題 2 の解答・解説

境界となる角を求めるため、まず $\cos x = -\frac{1}{2}$ を考える。

$0 \leq x < 2\pi$ では、境界は $x = \frac{2\pi}{3}$ 、 $x = \frac{4\pi}{3}$ である。

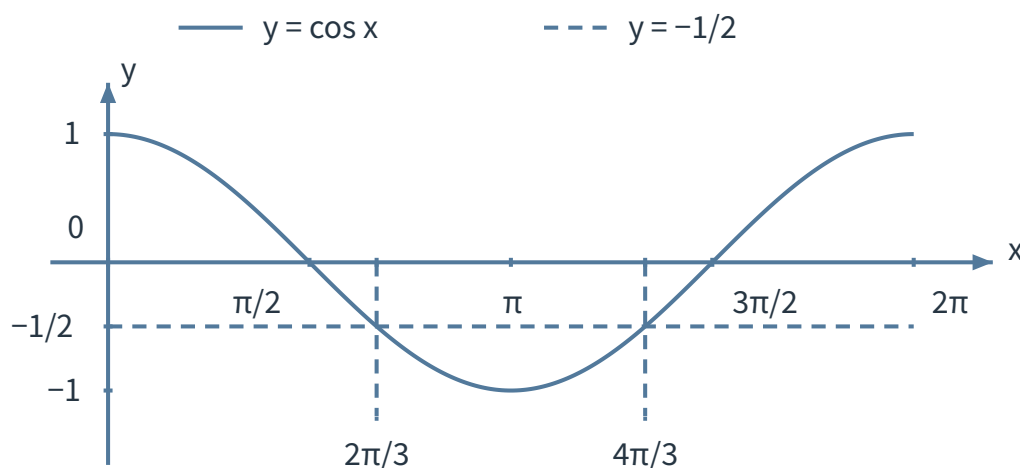


図2 $0 \leq x < 2\pi$ で $\cos x > -1/2$ 。解は $[0, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 2\pi)$ 。 $2\pi/3 \cdot 4\pi/3 \cdot 2\pi$ は含めない。

$\cos x$ は単位円の横座標である。横座標が $-\frac{1}{2}$ より大きくなる部分を考える。

区間 $0 \leq x < \frac{2\pi}{3}$ では、例えば $x = 0$ とすると $\cos 0 = 1$ であり条件を満たす。

区間 $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ では、例えば $x = \pi$ とすると $\cos \pi = -1$ であり条件を満たさない。

区間 $\frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ では、例えば $x = \frac{3\pi}{2}$ とすると $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ であり条件を満たす。

今回は $>$ であるため、境界の角 $\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{4\pi}{3}$ は含めない。また、指定区間では 0 は含まれるが 2π は含まれない。

したがって、解は $0 \leq x < \frac{2\pi}{3}$ または $\frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ である。

例題 3

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。

$$\tan x < 1$$

例題 3 の解答・解説

境界となる角を求めるため、まず $\tan x = 1$ を考える。

$0 \leq x < 2\pi$ では、等号を満たす角は $x = \frac{\pi}{4}$ 、 $x = \frac{5\pi}{4}$ である。

ただし、 $\tan x$ は $x = \frac{\pi}{2}$ 、 $x = \frac{3\pi}{2}$ で定義されないため、この2つの角も区切りとして考える必要がある。

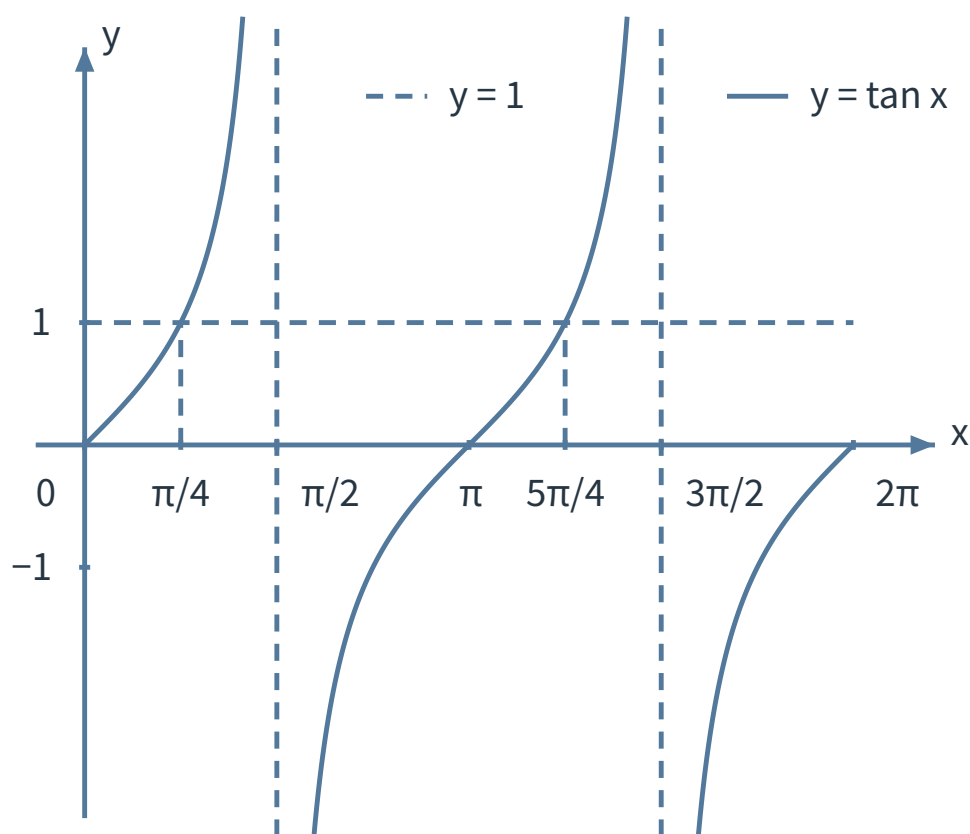


図3 $0 \leq x < 2\pi$ で $\tan x < 1$ 。解は $[0, \pi/4) \cup (\pi/2, 5\pi/4) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ 。 $\pi/4 \cdot 5\pi/4$ 、極 $\pi/2 \cdot 3\pi/2$ 、上端 2π は含めない。

第1枝 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ では、 $\tan x$ は連続で単調増加する。この枝では $\frac{\pi}{4}$ で $\tan x = 1$ となるため、 $\tan x < 1$ を満たす部分は $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ である。

第2枝 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ では、 $\tan x$ は連続で単調増加する。境界 $\frac{5\pi}{4}$ で $\tan x = 1$ となるため、それより左側では $\tan x < 1$ 、右側では $\tan x > 1$ となる。したがって、この枝での解は $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}$ である。

第3枝 $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ では、 $\tan x$ は連続で単調増加するが、この範囲では負の値をとる。そのため常に $\tan x < 1$ であり、すべての区間が解になる。

また、 $\frac{\pi}{4}$ と $\frac{5\pi}{4}$ は厳密不等式なので含めない。 $\frac{\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2}$ は $\tan x$ が定義されないため含めない。 $x = 0$ は $\tan 0 = 0$ で条件を満たすため解に含める。

したがって、解は $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ または $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}$ または $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ である。

演習問題

演習問題 1

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。

$$-2\sin x - 1 < 0$$

演習問題 2

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。
 $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

演習問題 3

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。
 $\tan x \geq 0$

演習問題 4

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式をそれぞれ解きなさい。
(1) $\sin x > 2$
(2) $\cos x \leq 2$

演習問題 5

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。
 $\cos x \leq -1$

演習問題 6

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。
 $\sin(2x) \geq \frac{1}{2}$

演習問題 7

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。
 $\sin x + \cos x > 0$

演習問題 8

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、次の不等式を解きなさい。
次の解法の誤りを指摘し、正しい考え方で解きなさい。
 $\cos x(\sin x - 1) > 0$ を解くとき、
「両辺を $\cos x$ で割れば $\sin x - 1 > 0$ になる」
と考えた。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

不等式を変形する。

$-2\sin x - 1 < 0$ より、 $-2\sin x < 1$ となる。

ここで、両辺を -2 で割ると負の数で割ることになるため、不等号の向きが逆になる。

したがって、 $\sin x > -\frac{1}{2}$ を解けばよい。

境界は $\sin x = -\frac{1}{2}$ であり、 $0 \leq x < 2\pi$ では $x = \frac{7\pi}{6}$ 、 $x = \frac{11\pi}{6}$ である。

$\sin x$ が $-\frac{1}{2}$ より大きいのは、下側の部分を除いた範囲である。

したがって、 $0 \leq x < \frac{7\pi}{6}$ と $\frac{11\pi}{6} < x < 2\pi$ が条件を満たす。

不等式は $>$ なので境界の角は含めない。また、指定区間では 0 は含むが 2π は含まない。

したがって、解は $0 \leq x < \frac{7\pi}{6}$ または $\frac{11\pi}{6} < x < 2\pi$ である。

演習問題 2 の解答・解説

境界を求めるため、 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。

$0 \leq x < 2\pi$ では、境界は $x = \frac{\pi}{4}$ 、 $x = \frac{7\pi}{4}$ である。

$\cos x$ は単位円の横座標であり、横座標が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 以上になる部分を考える。

余弦のグラフで考えると、 $\cos x$ が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 以上になるのは、 $x = 0$ 付近と $x = 2\pi$ 付近の 2 つの区間である。

また、 $x = 0$ では $\cos 0 = 1$ となり条件を満たすため、 0 は解に含まれる。

不等式は $\geq$ なので境界の角は含める。

ただし、指定区間は $x < 2\pi$ なので、右端の 2π は含まれない。

したがって、解は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ または $\frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi$ である。

演習問題 3 の解答・解説

$\tan x$ は $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ で定義されないため、これらを境界として 3 つの枝に分ける。

また、 $\tan x = 0$ となる角は $x = 0, \pi$ である。

第 1 の枝 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ では、 $\tan x$ は増加し、 0 以上である。

第 2 の枝 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ では、 π で $\tan \pi = 0$ となる。増加する枝の中で、 π より前は負、後は正である。

第 3 の枝 $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ では、 $\tan x$ は負である。

$\geq$ なので 0 となる角は含める。ただし、未定義点は含めない。

したがって、解は $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ または $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$ である。

演習問題 4 の解答・解説

(1) $\sin x > 2$ を考える。

$\sin x$ の値域は $-1 \leq \sin x \leq 1$ である。

したがって、最大値 1 を超える値 2 をとることはできない。

よって、条件を満たす角は存在しない。

したがって、(1) の解はなしである。

(2) $\cos x \leq 2$ を考える。

$\cos x$ の値域は $-1 \leq \cos x \leq 1$ である。

すべての角で $\cos x \leq 1 < 2$ が成り立つため、指定された範囲の全てが解になる。

したがって、(2) の解は $0 \leq x < 2\pi$ である。

この 2 つの違いは、不等号の向きと三角関数の値域による。

今回の基準値はどちらも 2 であり、 $\sin x$ 、 $\cos x$ の最大値である 1 より大きい。

そのため、 $\sin x > 2$ は最大値を超えることを要求するため不可能になる。一方、 $\cos x \leq 2$ は取りうる全ての値 $-1 \leq \cos x \leq 1$ が条件を満たすため、指定範囲の全てが解になる。

演習問題 5 の解答・解説

$\cos x$ の値域は $-1 \leq \cos x \leq 1$ である。

$\cos x \leq -1$ は、値域の下端である -1 だけを許す条件になる。

したがって、 $\cos x = -1$ を考える。

$0 \leq x < 2\pi$ では、 $\cos x = -1$ となる角は $x = \pi$ だけである。

等号を含むため、この角は解に含まれる。

したがって、解は $x = \pi$ である。

演習問題 6 の解答・解説

$u = 2x$ と置く。

すると、 $0 \leq x < 2\pi$ より $0 \leq u < 4\pi$ となる。

不等式は $\sin u \geq \frac{1}{2}$ となる。

まず $0 \leq u < 4\pi$ の範囲で考える。

$\sin u = \frac{1}{2}$ となる境界は、 $u = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ である。

$\sin u \geq \frac{1}{2}$ なので、境界を含む区間を選ぶ。

したがって、次のように計算する。

$$\frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{または } \frac{13\pi}{6} \leq u \leq \frac{17\pi}{6}$$

ここで $u = 2x$ を戻す。

$$\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{または } \frac{13\pi}{12} \leq x \leq \frac{17\pi}{12}$$

したがって、解は $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$ または $\frac{13\pi}{12} \leq x \leq \frac{17\pi}{12}$ である。

演習問題 7 の解答・解説

加法定理の形を利用して合成する。

$\sin x + \cos x$ は、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$\sqrt{2} > 0$ なので、 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) > 0$ を解けばよい。

$y = x + \frac{\pi}{4}$ と置くと、範囲は $\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{9\pi}{4}$ となる。

この範囲で正になるのは、 $\frac{\pi}{4} \leq y < \pi$ または $2\pi < y < \frac{9\pi}{4}$ である。

元に戻すと、 $0 \leq x < \frac{3\pi}{4}$ または $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ となる。

したがって、解は $0 \leq x < \frac{3\pi}{4}$ または $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ である。

演習問題 8 の解答・解説

示された解法は誤りである。

理由は、 $\cos x$ の符号が区間によって変化し、0 になる角もあるためである。符号が分からない式で割ると、不等号の向きが変わる場合や、割ってはいけない場合を見落とす。

まず、 $\cos x(\sin x - 1) > 0$ を考える。

$\sin x - 1 \leq 0$ であり、等号になるのは $\sin x = 1$ のときだけである。

$\sin x = 1$ は $x = \frac{\pi}{2}$ である。

積が正になるには、2つの因子が同符号である必要がある。

ただし $\sin x - 1$ は常に負または 0 なので、正になることはない。したがって、 $\cos x$ も負で、かつ $\sin x - 1 < 0$ である必要がある。

$\sin x - 1 < 0$ は $x \neq \frac{\pi}{2}$ で成立する。

よって、必要なのは $\cos x < 0$ である。

$0 \leq x < 2\pi$ では、 $\cos x < 0$ となるのは $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ であり、この範囲には $x = \pi$ も含まれる。

境界 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ の扱いを確認する。

$x = \frac{\pi}{2}$ では $\sin x - 1 = 0$ となり積は 0 なので除く。

$x = \frac{3\pi}{2}$ では $\cos x = 0$ となり積は 0 なので除く。

したがって、解は $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ である。