第 193 講 接線

この講でできるようになること

- 曲線上の点における接線が、その点での変化の割合を表す直線であることを理解できる。
- 割線を接線へ近づける考え方から、接線の傾きが導関数で表される理由を説明できる。
- 接点と接線の傾きを区別し、接線の方程式を求められる。
- 指定された接点や傾きの条件から接線を正しく決定できる。

割線から接線へ

関数 $f(x)$ が a を含む開区間で定義され、$x=a$ で微分可能であるとする。また、$h\neq 0$ かつ $a+h$ がこの関数の定義域内にあるとする。
点 $A(a,f(a))$ と点 $B(a+h,f(a+h))$ を通る割線の傾きを m_h と定めると、m_h は差商で表される。

$$m_h=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分可能性より、h を 0 に近づけたとき、この傾きは有限の極限をもつ。

$$\lim_{h\to 0} m_h=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

したがって、点 B を点 A へ近づけると、割線の極限として得られる直線が点 A における接線である。接線の傾きは $f'(a)$ である。

接線の方程式

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であり、点 $(a,f(a))$ における接線を考える。
接線の傾きは $f'(a)$ であるため、点と傾きの関係から接線の方程式は次で表される。

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

ここで、$(a,f(a))$ は接点、$f'(a)$ は接線の傾きである。
接点の座標と傾きは別の情報であり、混同してはいけない。

接線と曲線の関係

接線は接点を通り、その点での曲線の傾きと同じ傾きをもつ直線であり、曲線を横切ることもある。
例えば、関数 $y=x^3$ を考える。導関数は $y'=3x^2$ であり、原点では傾きが $3\cdot 0^2=0$ になる。
原点を通る条件と傾きが 0 である条件から、原点での接線は $y=0$ である。
しかし、$x>0$ では $x^3>0$、$x<0$ では $x^3<0$ となるため、原点の左右で曲線の位置が変わる。
したがって、この接線は接点で曲線を横切る。
接線を判断するときは、接点を通ることと、その点での傾きが一致することの両方を確認する必要がある。

接線を求める基本手順

接線を求めるときは、次の順序で考える。
1. 接点の座標を求める。
2. 導関数を利用して接点での傾きを求める。
3. 点 $(a,f(a))$ と傾き $f'(a)$ を接線の式へ代入する。

©ミライコーチング

接点が指定されている場合は、その点での微分係数を調べることが中心となる。

割線と接線の比較

割線と接線の違いを具体的に確認するため、$y = x^2$ を考える。
点 $A(1, 1)$ と点 $B(2, 4)$ を結ぶ割線の傾きは $\frac{4-1}{2-1} = 3$ である。この 2 点を通る直線は $y = 3x - 2$ となる。
一方、$y = x^2$ の導関数は $y' = 2x$ であり、点 A での接線の傾きは 2 である。したがって、点 A における接線は $y = 2x - 1$ となる。
図では、点 B を点 A へ近づけたときに割線が接線へ近づく一般的な変化ではなく、具体的な点 $A(1, 1)$ と $B(2, 4)$ による 1 つの割線と接線の位置関係を示す。

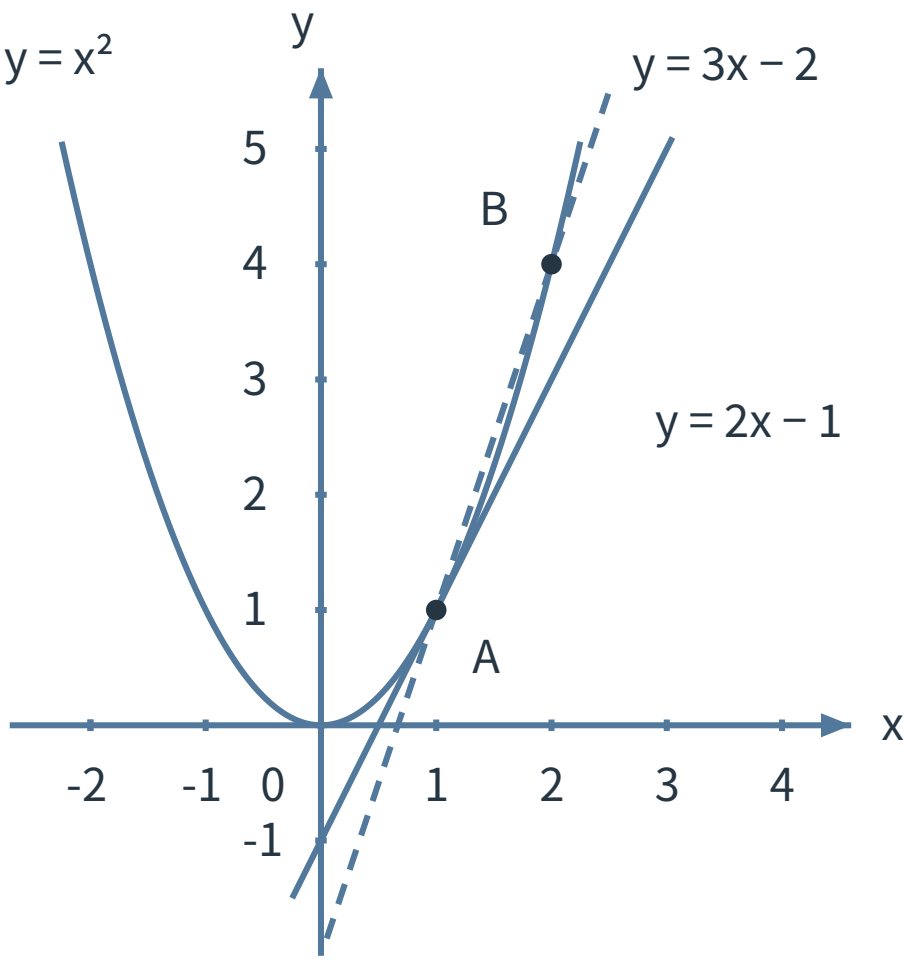

図 1　割線 $y = 3x - 2$ と接線 $y = 2x - 1$

接点を横切る接線

関数 $y = x^3$ の原点での接線を考える。
導関数は $y' = 3x^2$ であり、原点での傾きは 0 であるため、接線は $y = 0$ となる。

原点の左側では曲線は x 軸より下にあり、右側では上にあるため、曲線は原点で接線 $y=0$ を横切る。

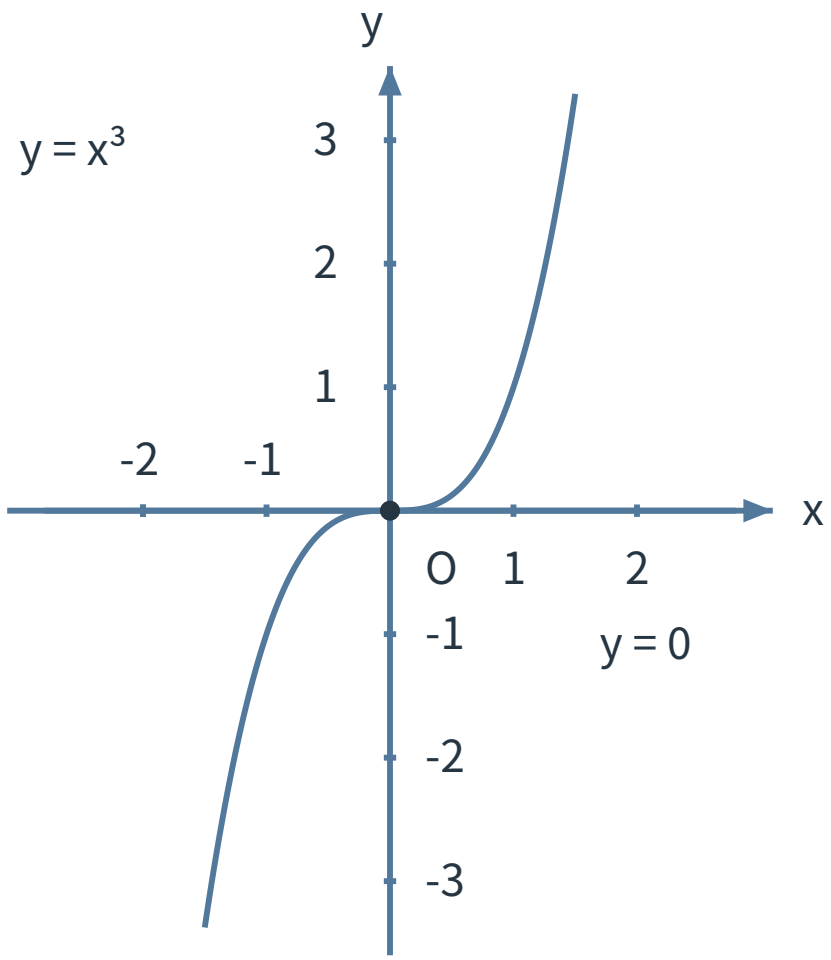

図 2　$y=x^3$ の原点での接線 $y=0$

例題 1

関数 $y=x^2+2x+1$ の点 $(1,4)$ における接線の方程式を求める。

例題 1 の解答・解説

関数 $y=x^2+2x+1$ を微分すると、$y'=2x+2$ である。
接点の x 座標は 1 であるため、接線の傾きは $2\cdot 1+2=4$ である。
接点 $(1,4)$ と傾き 4 を使うと、$y-4=4(x-1)$ となる。
したがって、接線の方程式は $y=4x$ である。

例題 1 の確認図

接点と接線の位置関係を確認する。

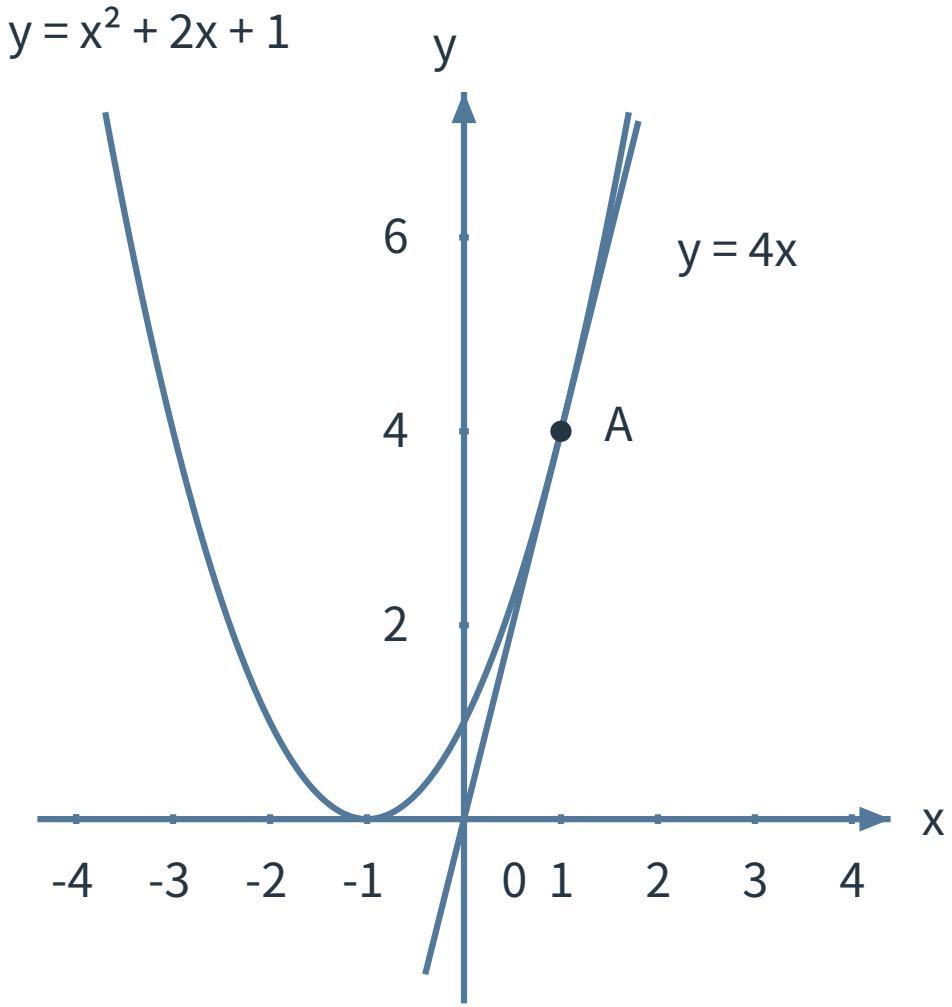

図 3　$y = x^2 + 2x + 1$ の点 $A(1, 4)$ での接線

例題 2

関数 $y = \log x$ の定義域を $x > 0$ とする。ただし、$\log x$ は自然対数を表す。この関数の点 $(1, 0)$ における接線の方程式を求める。

例題 2 の解答・解説

$f(x) = \log x$ とおくと、自然対数の微分より $f'(x) = \frac{1}{x}$ である。
接点の x 座標は 1 であるため、接線の傾きは $f'(1) = 1$ である。
接点 $(1, 0)$ と傾き 1 を使うと、$y = x - 1$ となる。
したがって、接線の方程式は $y = x - 1$ である。

©ミライコーチング

対数曲線の接線

関数 $y = \log x$ は定義域 $x > 0$ で考える。
点 $A(1, 0)$ における接線の傾きは $f'(1) = 1$ であり、接線の方程式は $y = x - 1$ となる。
図では、対数曲線と点 A を通る接線の位置関係を確認し、接点での傾きが一致していることを示す。

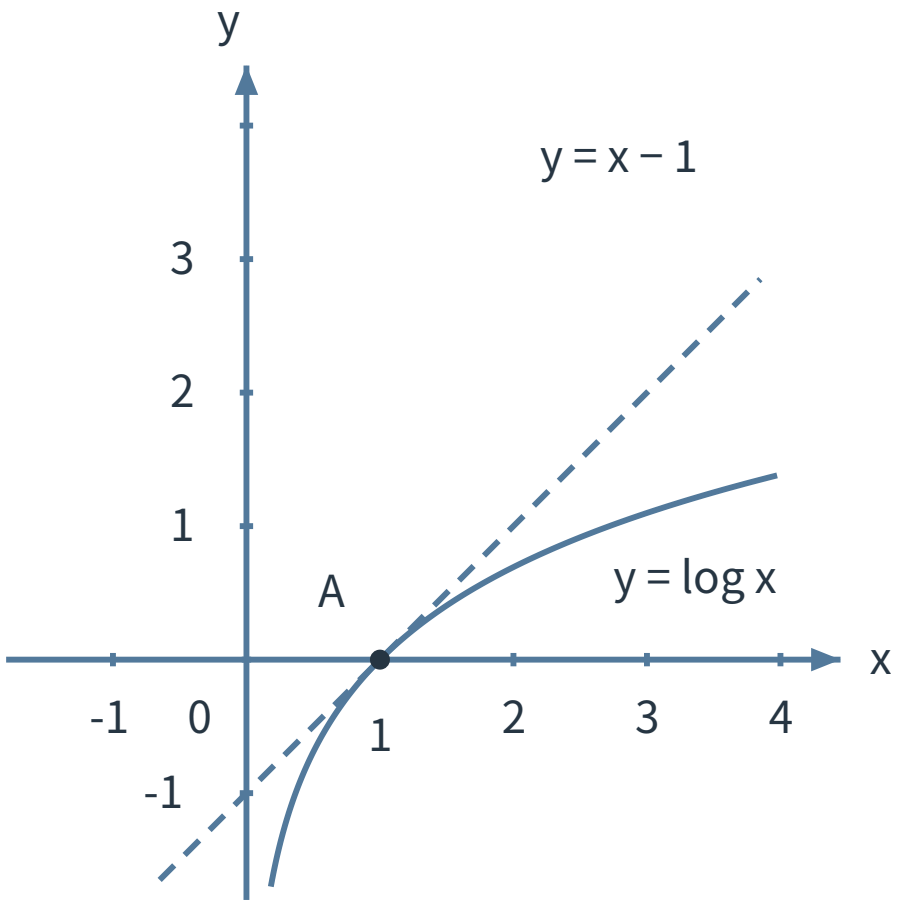

図 4　$y = \log x$ の点 $A(1, 0)$ での接線 $y = x - 1$

例題 3

関数 $y = \sin x$ において、点 $(0, 0)$ を通り、傾きが 2 である直線は接線になり得るか調べる。ただし、角は弧度法で表す。

例題 3 の解答・解説

関数 $y = \sin x$ の導関数は $y' = \cos x$ である。
接線の傾きは接点での導関数の値であるため、必要な条件は $\cos x = 2$ となる。
すべての実数 x に対して $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるため、$\cos x = 2$ を満たす実数は存在しない。
したがって、傾きが 2 の接線は存在しない。

©ミライコーチング

傾きから接線を求める場合

接線の傾きが指定されている場合は、接点を $(a, f(a))$ とおいて考える。
指定された実数の傾きを m とすると、接線の傾きの条件は $f'(a) = m$ である。
この方程式のすべての実数解 a を調べ、それぞれが関数の定義域に含まれ、かつその点で微分可能であることを確認する。
条件を満たす各接点について、$y - f(a) = f'(a)(x - a)$ を利用して接線の方程式を求める。

演習問題 1

関数 $y = x^3 - 2x + 1$ の定義域をすべての実数とする。この関数の点 $(1, 0)$ における接線の方程式を求める。

演習問題 2

関数 $y = \sin x$ の定義域をすべての実数とする。ただし、角は弧度法で表す。この関数の点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ における接線の方程式を求める。

演習問題 3

関数 $y = e^x$ の定義域をすべての実数とする。この関数の点 $(0, 1)$ における接線の方程式を求める。

演習問題 4

関数 $y = \log x$ の定義域を $x > 0$ とする。ただし、$\log x$ は自然対数を表す。この関数の点 $(e, 1)$ における接線の方程式を求める。

演習問題 5

関数 $y = (x^2 + 1)^2$ の定義域をすべての実数とする。この関数の点 $(0, 1)$ における接線の方程式を求める。

演習問題 6

関数 $y = \sin x$ の定義域をすべての実数とする。ただし、角は弧度法で表す。この関数の接線の傾きが 0 になる接点をすべて求め、それぞれの接線の方程式を求める。

演習問題 7

関数 $y = x^2 + 3x$ の定義域をすべての実数とする。この関数の接線の傾きが 5 になる接点と接線の方程式をすべて求める。

©ミライコーチング

演習問題 8

関数 $y = x^2 + 1$ の定義域をすべての実数とする。ある生徒が「点 $(2, 5)$ における接線の傾きは 5 である」と答えた。この誤りを説明し、正しい接線の傾きと接線の方程式を求める。

演習問題 1 の解答・解説

関数を微分すると、$y' = 3x^2 - 2$ である。
接点の x 座標は 1 であるため、接線の傾きは $3 \cdot 1^2 - 2 = 1$ である。
接点 $(1, 0)$ と傾き 1 を使うと、$y - 0 = x - 1$ となる。
したがって、接線の方程式は $y = x - 1$ である。

演習問題 2 の解答・解説

関数を微分すると、$y' = \cos x$ である。
接点の x 座標は $\frac{\pi}{2}$ であるため、接線の傾きは $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ である。
接線の傾きが 0 であるため、接線は水平な直線になる。
したがって、接線の方程式は $y = 1$ である。

演習問題 3 の解答・解説

関数を微分すると、$y' = e^x$ である。
接点の x 座標は 0 であるため、接線の傾きは $e^0 = 1$ である。
接点 $(0, 1)$ と傾き 1 を使うと、$y - 1 = x$ となる。
したがって、接線の方程式は $y = x + 1$ である。

演習問題 4 の解答・解説

$f(x) = \log x$ とおくと、自然対数の微分より $f'(x) = \frac{1}{x}$ である。
接点の x 座標は $e > 0$ であるため、e は関数の定義域に含まれ、この点で微分可能である。
接点での傾きは $f'(e) = \frac{1}{e}$ である。
接点 $(e, 1)$ と傾き $\frac{1}{e}$ を使うと、$y - 1 = \frac{x - e}{e}$ となる。
整理すると、接線の方程式は $y = \frac{x}{e}$ である。

演習問題 5 の解答・解説

関数 $y = (x^2 + 1)^2$ は、合成関数の微分を利用して微分する。
内側の関数を $u = x^2 + 1$、外側の関数を u^2 と考える。
したがって、$y' = 2(x^2 + 1) \cdot 2x = 4x(x^2 + 1)$ である。
接点の x 座標は 0 であるため、接点は $(0, 1)$ である。
接線の傾きは $4 \cdot 0 \cdot (0^2 + 1) = 0$ である。
したがって、接線の方程式は $y = 1$ である。

©ミライコーチング

演習問題 6 の解答・解説

関数を微分すると、$y' = \cos x$ である。
接線の傾きが 0 になる条件は $\cos x = 0$ である。
したがって、接点の x 座標は $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$（n は整数）である。
このとき、接点全体は $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, (-1)^n\right)$（$n$ は整数）で表される。
n が偶数の場合は接点の y 座標が 1 となり、n が奇数の場合は接点の y 座標が -1 となる。
接線の傾きはすべて 0 であるため、各接線は水平な直線である。偶数の場合の接線は $y = 1$、奇数の場合の接線は $y = -1$ である。

演習問題 7 の解答・解説

接点を $(a, a^2 + 3a)$ とおく。
関数を微分すると、$y' = 2x + 3$ であるため、接線の傾きは $2a + 3$ である。
傾きが 5 になる条件は $2a + 3 = 5$ であり、これを解くと $a = 1$ である。
したがって、接点は $(1, 4)$ であり、傾きは 5 である。
接点 $(1, 4)$ と傾き 5 を使うと、$y - 4 = 5(x - 1)$ となる。
整理すると、接線の方程式は $y = 5x - 1$ である。

演習問題 8 の解答・解説

誤りは、点 $(2, 5)$ の 5 を接線の傾きとして考えていることである。
5 は関数 $y = x^2 + 1$ の点 $(2, 5)$ における関数値であり、接線の傾きではない。
関数を微分すると、$y' = 2x$ である。
したがって、接点での正しい傾きは $2 \cdot 2 = 4$ である。
接点 $(2, 5)$ と傾き 4 を使うと、$y - 5 = 4(x - 2)$ となる。
整理すると、正しい接線の方程式は $y = 4x - 3$ である。

©ミライコーチング