

第 11 講 平方根と根号

学習目標

- 「 a の平方根」の意味を、2 乗との関係から説明できる。
- 正の数、0、負の数について、実数の範囲で平方根がいくつあるか判断できる。
- $\sqrt{a}$ が表す数と、「 a の平方根」を区別できる。
- 根号を外せる数を見分け、 $\sqrt{a^2} = |a|$ を正しく使える。

平方根は「2 乗する前の数」

結果から元の数を探す

$3^2 = 9$ です。また、 $(-3)^2 = 9$ です。

では、「2 乗すると 9 になる実数は何か」と聞かれたら、答えは 3 と -3 の 2 つです。

このように、ある数を 2 乗した結果が a になるとき、その数を a の平方根といいます。

平方根を考えたときの出発点は、「 $\sqrt{a}$ という記号を操作すること」ではありません。

何を 2 乗すると、その数になるかを逆向きに考えることが本質です。

平方根

実数 x が

$$x^2 = a$$

を満たすとき、 x を a の平方根といいます。

平方根を 2 乗から探す

25 の平方根を考えます。

$5^2 = 25$ であり、 $(-5)^2 = 25$ でもあります。

したがって、25 の平方根は 5 と -5 です。

正の数の平方根は 2 つある

正負の 2 つが同じ 2 乗になる

正の数を 2 乗しても、負の数を 2 乗しても、結果は正になります。

たとえば、

$$4^2 = 16, \quad (-4)^2 = 16$$

です。

そのため、正の数 a に対して平方根が存在するとき、正の平方根と負の平方根が対になって現れます。

たとえば、16 の平方根は 4 と -4 です。

一方、0 については $0^2 = 0$ なので、0 の平方根は 0 だけです。

実数の範囲での平方根の個数

- 正の数の平方根は 2 つあり、正負が反対の数になる。
- 0 の平方根は 0 の 1 つだけである。
- 負の数の平方根は、実数の範囲には存在しない。

負の数に実数の平方根がない理由

実数を 2 乗すると、その結果は必ず 0 以上になります。

したがって、実数 x に対して $x^2 = -4$ のような式を満たすものはありません。

この教材では実数の範囲を扱っているため、 -4 の平方根は存在しないと考えます。

根号 $\sqrt{a}$ が表すもの

根号

$a \geq 0$ のとき、 a の平方根のうち 0 以上のものを $\sqrt{a}$ と表します。

記号 $\sqrt{a}$ を **根号** といいます。

$\sqrt{9}$ は 3 だけを表す

9 の平方根は 3 と -3 の 2 つです。

しかし、 $\sqrt{9}$ という記号が表すのは、そのうち 0 以上の方だけなので、

$$\sqrt{9} = 3$$

です。

したがって、 $\sqrt{9} = \pm 3$ と書いてはいけません。

「9 の平方根」と「 $\sqrt{9}$ 」は同じ意味ではありません。

言葉と記号を区別する

たとえば7について考えると、

- 7の平方根は $\sqrt{7}$ と $-\sqrt{7}$ の2つ
- $\sqrt{7}$ は、そのうち正の方の1つです。

「平方根」と言われたら正負の両方を考え、「 $\sqrt{a}$ 」と書かれていたら0以上の方だけを表す、と区別します。

根号を外せる場合

完全な平方になっているかを見る

$\sqrt{36}$ の意味は、「2乗すると36になる0以上の数」です。

$6^2 = 36$ なので、

$$\sqrt{36} = 6$$

となります。

同じように、

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{16} = 4$$

です。

このように、根号の中の数がある0以上の数の2乗になっていれば、根号を使わずに表せます。

$\sqrt{a^2} = a$ とは限らない

$a = 5$ なら、 $\sqrt{a^2} = \sqrt{25} = 5$ です。

しかし、 $a = -5$ なら、

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

です。

一方、 $a = -5$ なので、 $\sqrt{a^2}$ は a とは一致しません。

$\sqrt{a}$ は0以上の数を表すため、

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

となります。

$\sqrt{a^2}$ の判断

$a \geq 0$ のとき、

$$\sqrt{a^2} = a$$

です。

$a < 0$ のとき、

$$\sqrt{a^2} = -a$$

です。

これはまとめて $\sqrt{a^2} = |a|$ と表せます。

例題

例題 1

次の数の平方根を求めなさい。

- (1) 49
- (2) $\frac{1}{9}$
- (3) 0

例題 1 の解答・解説

(1) $7^2 = 49$ 、 $(-7)^2 = 49$ なので、49の平方根は7、-7です。

(2) $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ 、 $(-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ なので、 $\frac{1}{9}$ の平方根は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{1}{3}$ です。

(3) $0^2 = 0$ なので、0の平方根は0です。

正の数では正負の2つを答えますが、0では0だけになる点に注意します。

例題 2

次の値を求めなさい。

- (1) $\sqrt{64}$
- (2) $-\sqrt{64}$
- (3) $\sqrt{\frac{25}{36}}$

例題 2 の解答・解説

- (1) $8^2 = 64$ であり、 $\sqrt{64}$ は 0 以上の平方根を表すので、 $\sqrt{64} = 8$ です。
(2) $-\sqrt{64} = -(8) = -8$ です。
(3) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$ であり、 $\frac{5}{6} > 0$ なので、 $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ です。
「平方根をすべて求める問題」と「 $\sqrt{a}$ の値を求める問題」を読み分けることが重要です。

例題 3

次の式を簡単にしなさい。

- (1) $\sqrt{(-7)^2}$
(2) $\sqrt{x^2}$
(3) $x < 0$ のとき、 $\sqrt{x^2}$

例題 3 の解答・解説

- (1) $(-7)^2 = 49$ なので、 $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$ です。
(2) x が正か負かは分かっていません。したがって、 $\sqrt{x^2} = |x|$ です。
(3) $x < 0$ なら $|x| = -x$ です。したがって、 $\sqrt{x^2} = -x$ です。
 $\sqrt{x^2}$ を機械的に x としないことが大切です。根号が表す値は必ず 0 以上になるため、符号を確認します。

■ 演習問題

練習問題 1

次の数の平方根を求めなさい。

- (1) 36
- (2) 100
- (3) $\frac{4}{25}$

練習問題 2

次の値を求めなさい。

- (1) $\sqrt{81}$
- (2) $-\sqrt{121}$
- (3) $\sqrt{\frac{49}{64}}$

練習問題 3

次の各文が正しければ「正」、誤っていれば「誤」と答えなさい。

- (1) 25 の平方根は 5 だけである。
- (2) $\sqrt{25} = 5$ である。
- (3) 0 の平方根は 0 だけである。
- (4) -9 の平方根は、実数の範囲には存在しない。

練習問題 4

次の式を簡単にしなさい。

- (1) $\sqrt{12^2}$
- (2) $\sqrt{(-9)^2}$
- (3) $\sqrt{0^2}$

練習問題 5

次の式を簡単にしなさい。

- (1) $\sqrt{x^2}$
- (2) $x \geq 0$ のとき、 $\sqrt{x^2}$
- (3) $x < 0$ のとき、 $\sqrt{x^2}$

練習問題 6

次の空欄に適する数または式を入れなさい。

- (1) 11 の平方根は $\sqrt{11}$ と _____ である。
- (2) $\sqrt{144} =$ _____
- (3) $a < 0$ のとき、 $|a| =$ _____
- (4) $a < 0$ のとき、 $\sqrt{a^2} =$ _____

練習問題 7

ある生徒が「 $(-6)^2 = 36$ だから、 $\sqrt{36} = -6$ としてもよい」と考えました。
この考えの誤りを、 $\sqrt{a}$ の意味に触れながら説明しなさい。

■ 演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) $6^2 = 36$ 、 $(-6)^2 = 36$ なので、36 の平方根は 6, -6 です。
(2) $10^2 = 100$ 、 $(-10)^2 = 100$ なので、100 の平方根は 10, -10 です。
(3) $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ 、 $(-\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ なので、 $\frac{4}{25}$ の平方根は $\frac{2}{5}$, $-\frac{2}{5}$ です。
正の数の平方根を求める問題では、正負の両方を忘れないようにします。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) $9^2 = 81$ であり、 $\sqrt{81}$ は 0 以上の平方根なので、 $\sqrt{81} = 9$ です。
(2) $\sqrt{121} = 11$ なので、 $-\sqrt{121} = -11$ です。
(3) $(\frac{7}{8})^2 = \frac{49}{64}$ であり、 $\frac{7}{8} > 0$ なので、 $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$ です。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) 誤です。25 の平方根は 5 と -5 の 2 つです。
(2) 正です。 $\sqrt{25}$ は 25 の平方根のうち 0 以上のものを表すので、5 です。
(3) 正です。 $0^2 = 0$ であり、0 の平方根は 0 の 1 つだけです。
(4) 正です。実数を 2 乗した値は必ず 0 以上になるので、2 乗して -9 になる実数は存在しません。
(1)と(2)の違いが、この単元で特に重要です。「平方根」という言葉は正負の両方を含みますが、根号 $\sqrt{a}$ は 0 以上の方だけを表します。

練習問題 4 の解答・解説

- (1) $12 > 0$ なので、 $\sqrt{12^2} = 12$ です。
(2) $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$ です。
(3) $\sqrt{0^2} = 0$ です。
どの場合にも、 $\sqrt{a^2} = |a|$ と考えれば符号を取り違えません。

練習問題 5 の解答・解説

- (1) x の符号が分からないので、 $\sqrt{x^2} = |x|$ です。
 - (2) $x \geq 0$ のとき $|x| = x$ なので、 $\sqrt{x^2} = x$ です。
 - (3) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ なので、 $\sqrt{x^2} = -x$ です。
- 同じ $\sqrt{x^2}$ でも、 x の符号条件によって根号を外したあとの形が変わります。

練習問題 6 の解答・解説

- (1) 11 の平方根は $\sqrt{11}$ と $-\sqrt{11}$ なので、空欄は $-\sqrt{11}$ です。
- (2) $12^2 = 144$ なので、 $\sqrt{144} = 12$ です。
- (3) $a < 0$ のときは符号を反対にした $-a$ が正になるので、 $|a| = -a$ です。
- (4) $\sqrt{a^2} = |a|$ であり、 $a < 0$ では $|a| = -a$ なので、 $\sqrt{a^2} = -a$ です。

練習問題 7 の解答・解説

- $(-6)^2 = 36$ なので、 -6 が 36 の平方根の 1 つであることは正しいです。
しかし、 $\sqrt{36}$ という記号は「36 の平方根すべて」を表すのではなく、36 の平方根のうち 0 以上のものを表します。
36 の平方根は 6 と -6 ですが、そのうち 0 以上なのは 6 です。
したがって、 $\sqrt{36} = 6$ であり、 $\sqrt{36} = -6$ とすることはできません。