

第 72 講 ユークリッドの互除法

学習目標

- ・ 2 つの正の整数の最大公約数を、割り算の余りを使って求められる。
- ・ $a = bq + r$ のとき、 a と b の最大公約数が b と r の最大公約数に等しい理由を説明できる。
- ・ ユークリッドの互除法の計算手順を正しい順序で実行できる。
- ・ 余りが 0 になるまで割り算を続け、最後の 0 でない余りから最大公約数を判断できる。

大きな数の最大公約数をどう求めるか

約数をすべて並べなくてもよい

2 つの正の整数の最大公約数は、それぞれの約数を列挙して求めることができる。

しかし、数が大きくなると約数をすべて調べるのは手間がかかる。

そこで、2 つの整数の割り算を行い、その余りを使って数を次々に小さくしていく方法を考える。
この方法がユークリッドの互除法である。

ユークリッドの互除法

2 つの正の整数について、大きい方を小さい方で割り、得られた余りを使って割り算を繰り返すことで最大公約数を求める方法をユークリッドの互除法という。

割り算を式で表す

商と余り

正の整数 a, b について、 $a > b$ とする。

a を b で割った商を q 、余りを r とすると、

$$a = bq + r$$

と表せる。

ここで余り r は、

$$0 \leq r < b$$

を満たす。

ユークリッドの互除法では、この余り r に注目する。

なぜ余りに置き換えてよいのか

共通の約数が変わらない

たとえば、

$$38 = 14 \cdot 2 + 10$$

とする。

38 と 14 の両方を割り切る整数を考える。

ある正の整数 d が 38 と 14 の両方を割り切るなら、

$$10 = 38 - 14 \cdot 2$$

であるため、 d は 10 も割り切る。

反対に、 d が 14 と 10 の両方を割り切るなら、

$$38 = 14 \cdot 2 + 10$$

であるため、 d は 38 も割り切る。

したがって、

- 38 と 14 の公約数
- 14 と 10 の公約数

は同じである。

よって、38 と 14 の最大公約数は、14 と 10 の最大公約数に等しい。

互除法の中心原理

正の整数について、

$$a = bq + r$$

であるとき、 a と b の最大公約数は、 b と r の最大公約数に等しい。

つまり、

大きい数と小さい数の組を、小さい数と余りの組へ置き換えてよい
ということである。

余りを使って数を小さくする

38 と 14 の最大公約数

38 を 14 で割ると、

$$38 = 14 \cdot 2 + 10$$

である。

したがって、38 と 14 の最大公約数は、14 と 10 の最大公約数に等しい。

次に、

$$14 = 10 \cdot 1 + 4$$

なので、14 と 10 の最大公約数は、10 と 4 の最大公約数に等しい。

さらに、

$$10 = 4 \cdot 2 + 2$$

である。

次に、

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 2 なので、38 と 14 の最大公約数は 2 である。

最後の 0 でない余りを見る

割り算を続けて余りが 0 になったとき、その直前に得られた 0 でない余りが最初の 2 数の最大公約数である。

同じことを、余りが 0 になった最後の割り算の「割る数」が最大公約数であると考えてもよい。

ユークリッドの互除法の手順

基本手順

2つの正の整数 a, b について、 $a > b$ とする。

1. a を b で割り、余りを求める。
2. 次は「 b と余り」の組で割り算を行う。
3. さらに「前の余りと新しい余り」の組へ置き換える。
4. 余りが 0 になるまで繰り返す。
5. 最後の 0 でない余りを最大公約数とする。

毎回、割る数と余りを次の組にする

途中の商そのものを次の計算に使うわけではない。

重要なのは、

割る数と余り

を次の 2 数として使うことである。

252 と 105 の最大公約数

割り算を順番に続ける

252 と 105 の最大公約数を求める。

まず、

$$252 = 105 \cdot 2 + 42$$

である。

次に、105 と 42 について、

$$105 = 42 \cdot 2 + 21$$

である。

さらに、

$$42 = 21 \cdot 2 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 21 なので、252 と 105 の最大公約数は 21 である。

余りが 0 になった時点で終了する

余りが 0 になったあとに計算を続ける必要はない。

その時点で、直前の 0 でない余りが最大公約数として確定する。

最初から割り切れる場合

余りがすぐ 0 になる場合

48 と 12 の最大公約数を考える。

$$48 = 12 \cdot 4 + 0$$

である。

最初の割り算で余りが 0 になった。

この場合、12 が 48 を割り切っているため、最大公約数は 12 である。

つまり、一方がもう一方の倍数である場合には、小さい方の数が最大公約数になる。

計算を確認する方法

各行で確認すること

互除法では、各割り算について次を確認するとよい。

- ・「割られる数 = 割る数 × 商 + 余り」の形になっているか。
- ・余りが割る数より小さいか。
- ・次の行では、前の「割る数」と「余り」を使っているか。
- ・余りが 0 になるまで続けているか。

この 4 点を確認すると、計算の取り違えを防ぎやすい。

例題

例題 1

84 と 30 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

例題 1 の解答・解説

84 を 30 で割ると、

$$84 = 30 \cdot 2 + 24$$

である。

次に、

$$30 = 24 \cdot 1 + 6$$

である。

さらに、

$$24 = 6 \cdot 4 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 6 なので、84 と 30 の最大公約数は 6 である。

例題 2

221 と 85 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

例題 2 の解答・解説

まず、

$$221 = 85 \cdot 2 + 51$$

である。

次に、

$$85 = 51 \cdot 1 + 34$$

である。

さらに、

$$51 = 34 \cdot 1 + 17$$

である。

最後に、

$$34 = 17 \cdot 2 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 17 なので、221 と 85 の最大公約数は 17 である。

例題 3

156 と 66 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。また、どの余りを答えとして用いるか説明せよ。

例題 3 の解答・解説

まず、

$$156 = 66 \cdot 2 + 24$$

である。

次に、

$$66 = 24 \cdot 2 + 18$$

である。

さらに、

$$24 = 18 \cdot 1 + 6$$

である。

最後に、

$$18 = 6 \cdot 3 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 6 なので、最大公約数は 6 である。

余りが 0 になった最後の割り算では 6 が割る数になっており、この 6 が直前に得られた最後の 0 でない余りである。

演習問題

練習問題 1

65 と 25 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

練習問題 2

91 と 35 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

練習問題 3

144 と 60 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

練習問題 4

187 と 68 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

練習問題 5

270 と 192 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

練習問題 6

次の計算はユークリッドの互除法の途中である。

$$118 = 45 \cdot 2 + 28$$

この次に行う割り算を式で表せ。

練習問題 7

次の割り算が得られた。

$$95 = 36 \cdot 2 + 23$$

$$36 = 23 \cdot 1 + 13$$

$$23 = 13 \cdot 1 + 10$$

$$13 = 10 \cdot 1 + 3$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

95 と 36 の最大公約数を答え、その理由を述べよ。

練習問題 8

ある生徒は、120 と 45 について、

$$120 = 45 \cdot 2 + 30$$

を計算し、「商が 2 なので最大公約数は 2 である」と判断した。
誤りを説明し、正しい最大公約数を求めよ。

練習問題 9

168 と 24 の最大公約数を、ユークリッドの互除法を用いて求めよ。また、割り算が 1 回で終了する理由を説明せよ。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

まず、

$$65 = 25 \cdot 2 + 15$$

である。

次に、

$$25 = 15 \cdot 1 + 10$$

である。

さらに、

$$15 = 10 \cdot 1 + 5$$

である。

最後に、

$$10 = 5 \cdot 2 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 5 なので、最大公約数は 5 である。

練習問題 2 の解答・解説

まず、

$$91 = 35 \cdot 2 + 21$$

である。

次に、

$$35 = 21 \cdot 1 + 14$$

である。

さらに、

$$21 = 14 \cdot 1 + 7$$

である。

最後に、

$$14 = 7 \cdot 2 + 0$$

となる。

したがって、最大公約数は 7 である。

練習問題 3 の解答・解説

まず、

$$144 = 60 \cdot 2 + 24$$

である。

次に、

$$60 = 24 \cdot 2 + 12$$

である。

最後に、

$$24 = 12 \cdot 2 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 12 なので、最大公約数は 12 である。

練習問題 4 の解答・解説

まず、

$$187 = 68 \cdot 2 + 51$$

である。

次に、

$$68 = 51 \cdot 1 + 17$$

である。

さらに、

$$51 = 17 \cdot 3 + 0$$

となる。

したがって、最大公約数は 17 である。

練習問題 5 の解答・解説

まず、

$$270 = 192 \cdot 1 + 78$$

である。

次に、

$$192 = 78 \cdot 2 + 36$$

である。

さらに、

$$78 = 36 \cdot 2 + 6$$

である。

最後に、

$$36 = 6 \cdot 6 + 0$$

となる。

最後の 0 でない余りは 6 なので、最大公約数は 6 である。

練習問題 6 の解答・解説

最初の割り算は、

$$118 = 45 \cdot 2 + 28$$

である。

次は、前の割る数 45 を、余り 28 で割る。

したがって、

$$45 = 28 \cdot 1 + 17$$

である。

練習問題 7 の解答・解説

最後の部分は、

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

である。

余りが 0 になる直前の 0 でない余りは 1 である。

したがって、95 と 36 の最大公約数は 1 である。

練習問題 8 の解答・解説

ユークリッドの互除法では、商を最大公約数とするのではない。

余りを使って割り算を続け、最後の 0 でない余りを最大公約数とする。

まず、

$$120 = 45 \cdot 2 + 30$$

である。

次に、

$$45 = 30 \cdot 1 + 15$$

である。

最後に、

$$30 = 15 \cdot 2 + 0$$

となる。

したがって、最大公約数は 15 である。

練習問題 9 の解答・解説

168 を 24 で割ると、

$$168 = 24 \cdot 7 + 0$$

である。

最初の割り算で余りが 0 になったので、最大公約数は 24 である。

24 が 168 を割り切っているため、小さい方の 24 そのものが最大公約数となり、割り算は 1 回で終了する。