第 256 講 ド・モアブルの定理

学習目標

- ド・モアブルの定理が、絶対値を累乗し偏角を整数倍する定理であると説明できる。
- 複素数の積の性質から、正の整数に対する定理を数学的帰納法で証明できる。
- 極形式で表された複素数の整数乗を求め、必要に応じて $a+bi$ の形へ直せる。
- 定理を用いて三角関数の多倍角を表す式を導ける。

1. 繰返しの規則を一つの式にする

掛ける回数が、長さの指数と角の係数になる

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$（$r>0$）を 1 回掛けるたび、絶対値は r 倍され、偏角は θ だけ加わる。n 回掛ければ、絶対値は r^n、偏角は $n\theta$ になる。この二つの変化を一つの式にまとめたものがド・モアブルの定理である。

例えば $|z|=1$、$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき、4 乗後も絶対値は 1 であり、偏角は $4\theta=2\frac{\pi}{3}$ になる。角を単に 4 倍するのではなく、絶対値も 4 乗することが重要である。

©ミライコーチング

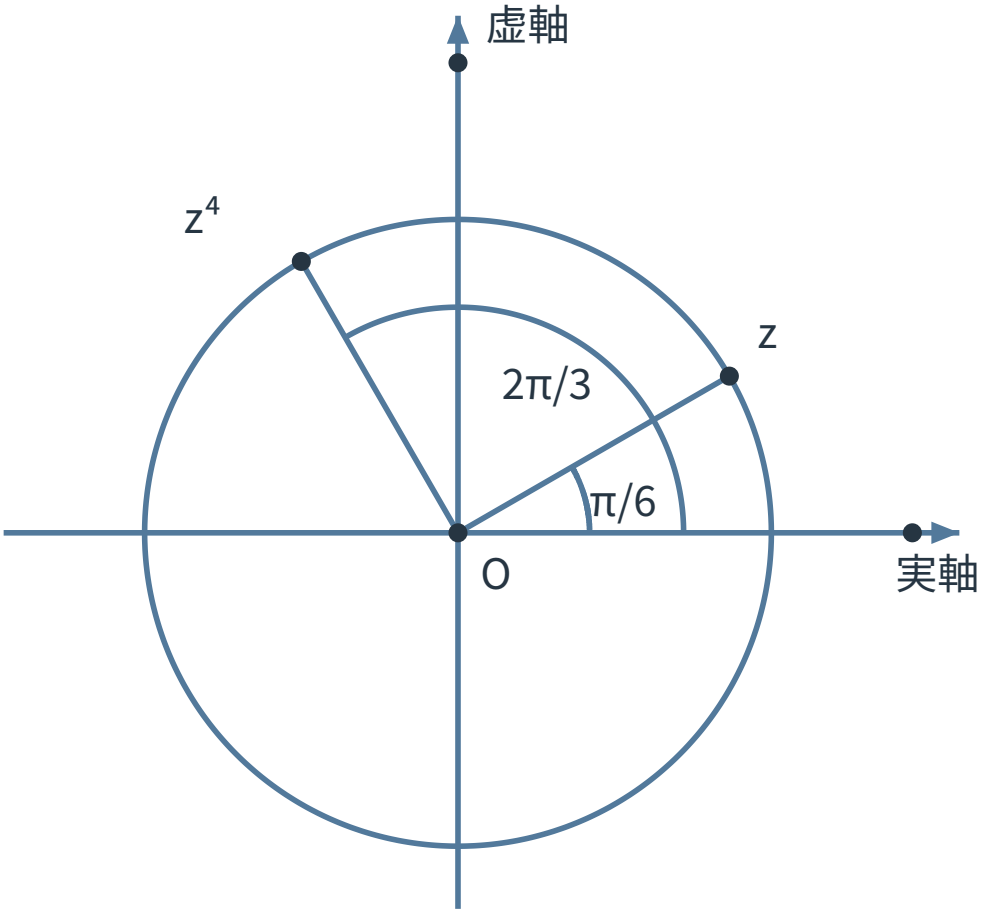

図 1　$z=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ の 4 乗では、偏角 $\frac{\pi}{6}$ が $2\frac{\pi}{3}$ になる

ド・モアブルの定理

$r>0$、θ を実数、n を正の整数とする。このとき、

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=r^n\{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\}$$

が成り立つ。特に $r=1$ のとき、

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

である。

角の表示は一通りではない

$n\theta$ に 2π の整数倍を加減しても同じ複素数を表す。答えの偏角を指定された範囲へ直す場合でも、まず $n\theta$ を正しく求めてから整理する。

例題 1：定理で累乗を求める

$z=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ とする。z^4 を極形式と $a+bi$ の形で表せ。

例題 1 の解答・解説

絶対値を 4 乗し、偏角を 4 倍すると、

$$z^4 = 2^4\left\{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\}$$

である。$\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$、$\sin\left(4\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、

$$z^4 = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8 - 8\sqrt{3}i$$

となる。

2. 定理は積の性質から証明できる

証明の出発点は偏角の加法である

複素数の積では、絶対値は掛け合わされ、偏角は加わる。三角関数の加法定理を用いると、

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

となる。ド・モアブルの定理は、この積の規則を同じ複素数へ繰り返し適用した結果である。

正の整数に対するド・モアブルの定理の証明

$P(n)$ を

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\}$$

という命題とする。
$n = 1$ のとき、両辺はともに $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ なので $P(1)$ は成り立つ。
次に、ある正の整数 k について $P(k)$ が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}&\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{k+1}\\ &= r^k\{\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\}\, r(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= r^{k+1}\{\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)\}\end{aligned}$$

となる。最後の等号では三角関数の加法定理を用いた。したがって $P(k+1)$ も成り立つ。数学的帰納法により、すべての正の整数 n について定理が成り立つ。

証明で増えるものを対応させる

k 乗から $k+1$ 乗へ進むとき、絶対値の指数は k から $k+1$ へ増え、偏角の係数も k から $k+1$ へ増える。この対応が帰納法の計算にそのまま現れる。

例題 2：証明の一段を確かめる

$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$ が成り立つと仮定する。この仮定から 6 乗の場合を示せ。

例題 2 の解答・解説

仮定した式の両辺へ $\cos\theta + i\sin\theta$ を掛けると、

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^6 = \{\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)\}(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \cos(6\theta) + i\sin(6\theta)$$

となる。最後の等号は、実部と虚部へ加法定理を適用したものである。

3. 0 乗と負の整数乗への広がり

底が 0 でないときは、すべての整数指数を扱える

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$）とする。$z^0 = 1$ であり、右辺も

$$r^0\{\cos(0\theta) + i\sin(0\theta)\} = 1$$

となるので、定理の式は $n = 0$ でも成り立つ。
正の整数 m に対し、$n = -m$ とする。極形式の逆数は

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$

である。正の整数 m に対する定理を $\frac{1}{z}$ へ用いると、

$$z^{-m} = \left(\frac{1}{z}\right)^m = r^{-m}\{\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)\}$$

となる。したがって、$z \neq 0$ ならド・モアブルの式はすべての整数 n で成り立つ。0 の 0 乗と負の整数乗は定義しないため、底が 0 の場合へこの拡張を用いてはならない。

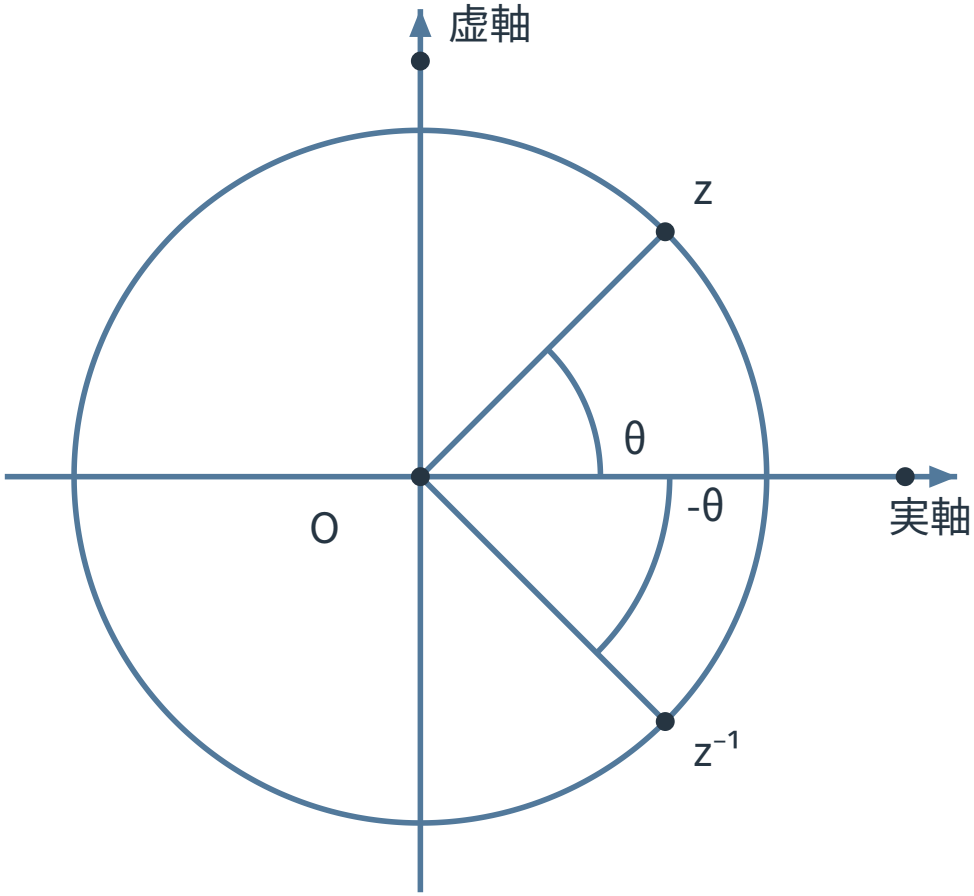

図 2　単位円上で指数を 1 から -1 へ変えると、偏角は θ から $-\theta$ へ反転する

例題 3：負の整数指数へ用いる

$z = 2\{\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\}$ とする。z^{-3} を極形式と $a+bi$ の形で表せ。

例題 3 の解答・解説

$z \neq 0$ なので、負の整数指数へ定理を用いられる。絶対値は $2^{-3} = \frac{1}{8}$、偏角は $-3\frac{\pi}{4}$ であるから、

$$z^{-3} = \frac{1}{8}\left\{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$$

である。したがって、

$$z^{-3} = \frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\sqrt{2}}{16}i$$

となる。

4. 実部と虚部を比べて多倍角を得る

同じ複素数の二つの表し方を比較する

$r=1$、$n=3$ のド・モアブルの定理は

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)$$

である。左辺を展開し、$i^2=-1$、$i^3=-i$ を用いると、

$$(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

となる。複素数が等しいとき、実部どうし、虚部どうしがそれぞれ等しい。したがって、

$$\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$

および

$$\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$$

を得る。さらに $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ を用いれば、$\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ とも表せる。

例題 4：2 倍角の式を導く

ド・モアブルの定理を $n=2$ に用い、$\cos(2\theta)$ と $\sin(2\theta)$ を $\cos\theta$、$\sin\theta$ で表せ。

例題 4 の解答・解説

定理から、

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$$

である。左辺を展開すると、

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta$$

となる。実部と虚部を比較して、

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\qquad \sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$

を得る。

5. 演習

演習 1：極形式の累乗

$z=3\{\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\}$ とする。z^3 を極形式と $a+bi$ の形で表せ。

演習 2：直交形式から極形式へ直す

$(1+i)^8$ を求めよ。

演習 3：大きな指数

$\{\cos(2\frac{\pi}{5})+i\sin(2\frac{\pi}{5})\}^{15}$ を求めよ。

©ミライコーチング

演習 4：負の整数指数

$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{-4}$ を $a+bi$ の形で表せ。

演習 5：帰納法の計算

正の整数 k について、$\{2(\cos\theta+i\sin\theta)\}^k=2^k\{\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)\}$ が成り立つと仮定する。$k+1$ 乗の場合の式を導け。

演習 6：多倍角の式

ド・モアブルの定理を $n=4$ に用い、$\cos(4\theta)$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

演習 1 の解答・解説

定理により、絶対値は $3^3=27$、偏角は $3\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ となる。したがって、

$$z^3=27\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=27i$$

である。

演習 2 の解答・解説

$1+i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ なので、

$$(1+i)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8\{\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\}=16$$

である。

演習 3 の解答・解説

定理により、

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right\}^{15}=\cos(6\pi)+i\sin(6\pi)=1$$

である。偏角 6π は 2π の整数倍なので、実軸の正の向きを表す。

演習 4 の解答・解説

底の絶対値は 1 であり、0 ではない。したがって、

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{-4}=\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$$

である。$-4\frac{\pi}{3}$ に 2π を加えると $2\frac{\pi}{3}$ なので、

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となる。

©ミライコーチング

演習 5 の解答・解説

仮定した式へ $2(\cos\theta + i\sin\theta)$ を掛けると、

$$\begin{aligned}&\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{k+1}\\&= 2^{k+1}\{\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\}(\cos\theta + i\sin\theta)\\&= 2^{k+1}\{\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)\}\end{aligned}$$

となる。絶対値の因子 2 と偏角 θ がそれぞれ一つ増えている。

演習 6 の解答・解説

定理の左辺を展開すると、

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$$

である。右辺 $\cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$ と実部を比較して、

$$\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

を得る。

定理を使うときの確認事項

- 底を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の形にし、$r > 0$ を確認する。
- 絶対値は r^n、偏角は $n\theta$ とし、二つを混同しない。
- $n = 0$ または負の整数まで広げるときは、底が 0 でないことを先に確認する。
- 展開して多倍角を導くときは、$i^2 = -1$ を用いて実部と虚部を分ける。

©ミライコーチング