第 236 講 空間の直線・平面・図形をベクトルで考える

学習目標

- 空間内の直線を、通る点と方向ベクトルを使って表せる。
- 空間内の平面を、基準点と 2 つの方向ベクトル、または法線ベクトルを使って表せる。
- 直線と平面の交点、および点から平面へ下ろした垂線の足を求められる。
- 三角形や四面体の重心を、位置ベクトルの平均として求められる。

1. 直線上の点は「基準点から同じ向きへ進んだ点」である

直線を動き方で表す

点 A を通り、零ベクトルでないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を考える。直線上では、A から $\vec{d}$ と同じ向き、または反対向きへ何倍か進めばすべての点に届く。原点を O、直線上の点を P とすると、この関係は実数 t を使って

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$$

と表せる。$t = 0$ は点 A、$t > 0$ は $\vec{d}$ の向き、$t < 0$ は反対向きへの移動を表す。$\vec{d}$ の長さは直線を変えず、向きだけが直線を決める。

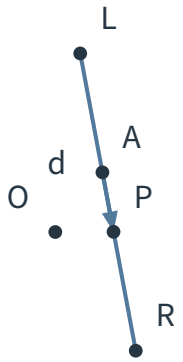

図 1　点 A を通り方向ベクトル d に平行な直線

空間直線のベクトル方程式

$A(a_1, a_2, a_3)$ を通り、方向ベクトル $\vec{d} = (l, m, n) \neq \vec{0}$ に平行な直線上の点を $P(x, y, z)$ とすると、

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(l, m, n) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である。したがって、$x = a_1 + lt$、$y = a_2 + mt$、$z = a_3 + nt$ である。ある点が直線上にあるかを判定するときは、3 つの成分で同じ t が使えるかを調べる。

例題 1：直線上の点を判定する

点 $A(1, -1, 2)$ を通り、$\vec{d} = (2, 1, -1)$ に平行な直線を l とする。
(1) l のベクトル方程式を求めよ。 (2) 点 $B(5, 1, 0)$、$C(3, 0, 0)$ がそれぞれ l 上にあるか判定せよ。

©ミライコーチング

例題 1 の解答・解説

(1) 直線上の点を $P(x,y,z)$ とすると、

$$(x,y,z)=(1,-1,2)+t(2,1,-1)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

である。
(2) B については、x 成分から $1+2t=5$ より $t=2$ である。この値を使うと $y=-1+2=1$、$z=2-2=0$ となるので、B は l 上にある。
C については、x 成分から $t=1$ であり、$y=-1+1=0$ までは一致する。しかし $z=2-1=1\neq 0$ だから、C は l 上にない。一部の成分だけでなく、すべての成分で同じ t が使えることが必要である。

2. 平面では独立な 2 方向へ動ける

直線と平面の自由度の違い

直線では 1 つの実数 t だけを変えた。平面上では、互いに平行でない 2 つの方向へ別々に動けるため、2 つの実数 s,t が必要になる。点 A を基準に、平面内の平行でないベクトル $\vec{u}$、$\vec{v}$ を使うと、平面上の点 P は

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\vec{u}+t\vec{v}$$

と表せる。$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行だと動ける方向が 1 つしかなく、平面全体を表せない。

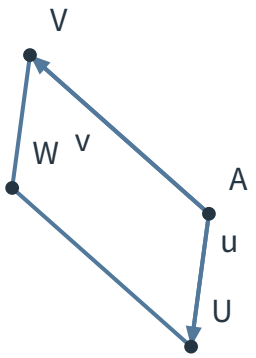

図 2　点 A から 2 つの独立な方向 u、v で張られる平面

平面のベクトル方程式

点 A を通り、互いに平行でない $\vec{u}$、$\vec{v}$ に平行な平面上の点を P とすると、

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\vec{u}+t\vec{v}\qquad(s,t\in\mathbb{R})$$

である。3 点 A,B,C が一直線上にないときは、$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$、$\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ と選べば、3 点を通る平面を表せる。

例題 2：平面上の点を判定する

点 $A(1,0,1)$ を通り、$\vec{u}=(1,1,0)$、$\vec{v}=(0,1,1)$ に平行な平面を α とする。
(1) α のベクトル方程式を求めよ。 (2) 点 $P(3,1,0)$ が α 上にあることを示せ。

例題 2 の解答・解説

(1) 平面上の点を $X(x,y,z)$ とすると、

$$(x,y,z)=(1,0,1)+s(1,1,0)+t(0,1,1)\qquad(s,t\in\mathbb{R})$$

である。
(2) 右辺の成分を比べると、$x=1+s$、$y=s+t$、$z=1+t$ である。$P(3,1,0)$ に対して $x=3$ から $s=2$、$z=0$ から $t=-1$ を得る。このとき $s+t=1$ で y 成分も一致する。したがって、P は α 上にある。実際、$\overrightarrow{AP}=2\vec{u}-\vec{v}$ である。

3. 法線ベクトルは平面を 1 本の式で表す

平面内のすべての移動に垂直な向きを使う

平面に垂直な零ベクトルでないベクトルを、その平面の法線ベクトルという。点 A を通り、$\vec{n}$ を法線ベクトルにもつ平面上の点を P とすると、$\overrightarrow{AP}$ は平面内の移動だから $\vec{n}$ と垂直である。よって平面は

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

で表せる。この見方では、平面内の 2 方向を探す代わりに、平面から突き出す 1 方向を使う。

法線ベクトルによる平面方程式

点 $A(a,b,c)$ を通り、$\vec{n}=(p,q,r)\neq\vec{0}$ を法線ベクトルにもつ平面上の点を $P(x,y,z)$ とすると、

$$p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$$

である。整理すると $px+qy+rz+d=0$ の形になる。このとき (p,q,r) が法線ベクトルである。

2 つの平面の表し方を行き来する

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\vec{u}+t\vec{v}$ では平面内の動きを表す。$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ では平面に垂直な向きを表す。法線ベクトル $\vec{n}$ は、平面内の 2 方向に対して $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ を満たす。

例題 3：法線ベクトルから平面方程式を作る

点 $A(1,-1,2)$ を通り、$\vec{n}=(2,1,-1)$ を法線ベクトルにもつ平面 α の方程式を求めよ。また、点 $Q(0,1,2)$ が α 上にあることを確かめよ。

©ミライコーチング

例題 3 の解答・解説

平面上の点を $P(x, y, z)$ とすると、$\overrightarrow{AP} = (x-1, y+1, z-2)$ である。垂直条件より

$$(2, 1, -1) \cdot (x-1, y+1, z-2) = 0$$

だから、$2(x-1) + (y+1) - (z-2) = 0$ である。整理して、平面の方程式は

$$2x + y - z + 1 = 0$$

となる。$Q(0, 1, 2)$ を左辺へ代入すると $0 + 1 - 2 + 1 = 0$ だから、Q は α 上にある。

4. 交点・垂線・重心をベクトルで統一する

交点は 2 つの条件を同時に満たす点である

直線と平面の交点は、直線の式で表した点を平面方程式へ代入して求める。直線のパラメータが 1 つに決まれば交点は 1 つ、式が恒等的に成り立てば直線全体が平面上にあり、矛盾すれば平行で交わらない。この教材では交点が 1 つに決まる場合を扱う。

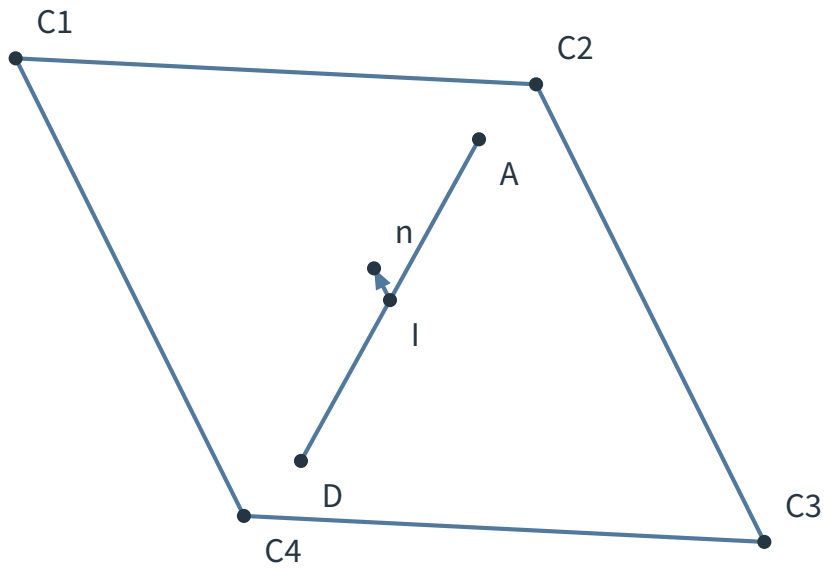

図 3　直線と平面の交点 I、および平面の法線方向

斜投影図の角度は空間の角度そのものではない

空間図を紙面へ斜めに投影すると、実際には垂直な線分が紙面上で直角に見えないことがある。上図の $\vec{n}$ と平面の垂直関係は、見かけの角度ではなく、平面内の方向との内積が 0 であることによって保証される。

重心は頂点の位置ベクトルの平均である

点の位置をベクトルで表すと、中点や重心も平均として扱える。三角形 ABC の重心 G は

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

であり、四面体 $ABCD$ の重心 G は

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$$

である。頂点を同じ重みで平均するため、原点を取り替えても表す点は変わらない。

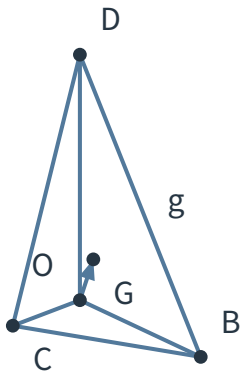

図 4　四面体 OBCD の 4 頂点の平均としての重心 G

例題 4：直線と平面の交点、垂線の足

直線 l と平面 α を

$$l:(x,y,z)=(1,0,2)+t(1,2,-1),\qquad \alpha:x+y+z=5$$

とする。
(1) l と α の交点を求めよ。 (2) 点 $P(3,1,4)$ から α へ下ろした垂線の足 H を求めよ。

例題 4 の解答・解説

(1) 直線上では $x=1+t$、$y=2t$、$z=2-t$ である。平面方程式へ代入すると

$$(1+t)+2t+(2-t)=5$$

より $2t+3=5$ だから $t=1$ である。したがって、交点は $(2,2,1)$ である。
(2) α の法線ベクトルは $\vec{n}=(1,1,1)$ である。垂線上の点は P から $\vec{n}$ に平行に進むので、$H=(3,1,4)-s(1,1,1)$ とおける。H が α 上にある条件は

$$(3-s)+(1-s)+(4-s)=5$$

である。よって $8-3s=5$ から $s=1$ となり、$H=(2,0,3)$ である。実際、$2+0+3=5$ であり、$\overrightarrow{PH}=(-1,-1,-1)$ は法線ベクトルに平行である。

5. 演習

演習 1：直線のベクトル方程式

点 $A(-1,2,3)$、$B(3,0,1)$ を通る直線のベクトル方程式を求めよ。また、点 $C(5,-1,0)$ がこの直線上にあるか判定せよ。

演習 2：3 点を通る平面

$A(1,0,0)$、$B(1,2,0)$、$C(0,0,1)$ とする。平面 ABC のベクトル方程式を、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ を使って表せ。また、点 $P(0,2,1)$ が平面 ABC 上にあるか判定せよ。

演習 3：平面方程式と点の所属

点 $A(2,0,-1)$ を通り、$\vec{n}=(1,-2,2)$ を法線ベクトルにもつ平面 α の方程式を求めよ。また、点 $B(0,1,1)$ が α 上にあるか判定せよ。

演習 4：直線と平面の交点

直線 $l:(x,y,z)=(2,-1,0)+t(-1,2,3)$ と平面 $\alpha:2x-y+z=7$ の交点を求めよ。

演習 5：垂線の足

点 $P(4,-1,3)$ から平面 $\alpha:x-2y+2z=3$ へ下ろした垂線の足 H を求めよ。

演習 6：四面体の重心

$A(1,0,2)$、$B(5,2,0)$、$C(-1,4,2)$、$D(3,-2,4)$ を頂点とする四面体 $ABCD$ の重心 G の座標を求めよ。また、G が線分 AM 上にあることを示せ。ただし、M は三角形 BCD の重心とする。

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

方向ベクトルは $\overrightarrow{AB}=(3-(-1),0-2,1-3)=(4,-2,-2)$ である。したがって、直線上の点を $P(x,y,z)$ とすると、

$$(x,y,z)=(-1,2,3)+t(4,-2,-2)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

である。方向ベクトルを $(2,-1,-1)$ に簡単にしても同じ直線を表す。
$C(5,-1,0)$ に対し、簡単にした式 $(-1,2,3)+s(2,-1,-1)$ を使うと、x 成分から $s=3$ である。このとき $y=2-3=-1$、$z=3-3=0$ も一致するので、C は直線上にある。

演習 2 の解答・解説

$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$、$\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ であり、両者は平行でない。したがって、平面上の点を $X(x,y,z)$ とすると、

$$(x,y,z)=(1,0,0)+s(0,2,0)+t(-1,0,1)\qquad(s,t\in\mathbb{R})$$

である。$P(0,2,1)$ については、$x=1-t=0$ から $t=1$、$y=2s=2$ から $s=1$ となり、$z=t=1$ も一致する。よって P は平面 ABC 上にある。

演習 3 の解答・解説

平面上の点を $P(x,y,z)$ とすると、$\overrightarrow{AP}=(x-2,y,z+1)$ である。法線ベクトルとの内積を 0 とおいて

$$(x-2)-2y+2(z+1)=0$$

となる。整理すると、平面の方程式は $x-2y+2z=0$ である。$B(0,1,1)$ を代入すると $0-2+2=0$ だから、B は α 上にある。

演習 4 の解答・解説

直線上では $x=2-t$、$y=-1+2t$、$z=3t$ である。平面方程式へ代入すると、

$$2(2-t)-(-1+2t)+3t=7$$

となる。整理して $5-t=7$ だから $t=-2$ である。したがって、交点は $(4,-5,-6)$ である。確認すると $2\cdot4-(-5)+(-6)=7$ となる。

演習 5 の解答・解説

平面の法線ベクトルは $\vec{n}=(1,-2,2)$ である。垂線の足を

$$H=(4,-1,3)-t(1,-2,2)=(4-t,-1+2t,3-2t)$$

とおく。H を平面方程式へ代入すると、

$$(4-t)-2(-1+2t)+2(3-2t)=3$$

より $12-9t=3$ だから $t=1$ である。よって $H=(3,1,1)$ である。実際、$3-2+2=3$ で H は平面上にあり、$\overrightarrow{PH}=(-1,2,-2)=-\vec{n}$ だから PH は平面に垂直である。

演習 6 の解答・解説

4 頂点の座標を成分ごとに平均すると、

$$G=\left(\frac{1+5-1+3}{4},\frac{0+2+4-2}{4},\frac{2+0+2+4}{4}\right)=(2,1,2)$$

である。一方、三角形 BCD の重心は

$$M=\left(\frac{5-1+3}{3},\frac{2+4-2}{3},\frac{0+2+4}{3}\right)=\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},2\right)$$

である。$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},0\right)$、$\overrightarrow{AG}=(1,1,0)$ だから、

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$$

が成り立つ。したがって、G は線分 AM 上にあり、$AG:GM=3:1$ である。