第 196 講 極大・極小

学習目標

この講では、関数の局所的な山や谷を表す極大・極小の意味を理解することを目標とする。
教材終了後には、次のことができるようになる。
- 極大を取るxの値と極大値$f(a)$を区別できる。
- 極値の定義を近傍の関数値の比較から説明できる。
- 微分可能な関数が極値を取るとき、なぜ$f'(a)=0$となるかを理解できる。
- $f'(x)$の符号の変化から極大・極小を判断できる。
- $f'(a)=0$であっても極値とは限らないことを説明できる。

山や谷を見る考え方

極値とは、関数全体で最大や最小になることではなく、ある点の近くで関数値を比較したときに山や谷のような特徴を持つことである。
例えば、$f(x)=x^3-3x$では、$x=-1$の近くで増加から減少へ変化し、グラフ上の点$A(-1,2)$付近で山の形になる。また、$x=1$の近くでは減少から増加へ変化し、グラフ上の点$B(1,-2)$付近で谷の形になる。
ただし、増減の切替は極値を判断する方法であり、極値そのものの定義は近くの関数値との比較によって決まる。広い範囲での最大値や最小値ではなく、注目した点の近くでの性質を見ることが極値の特徴である。

©ミライコーチング

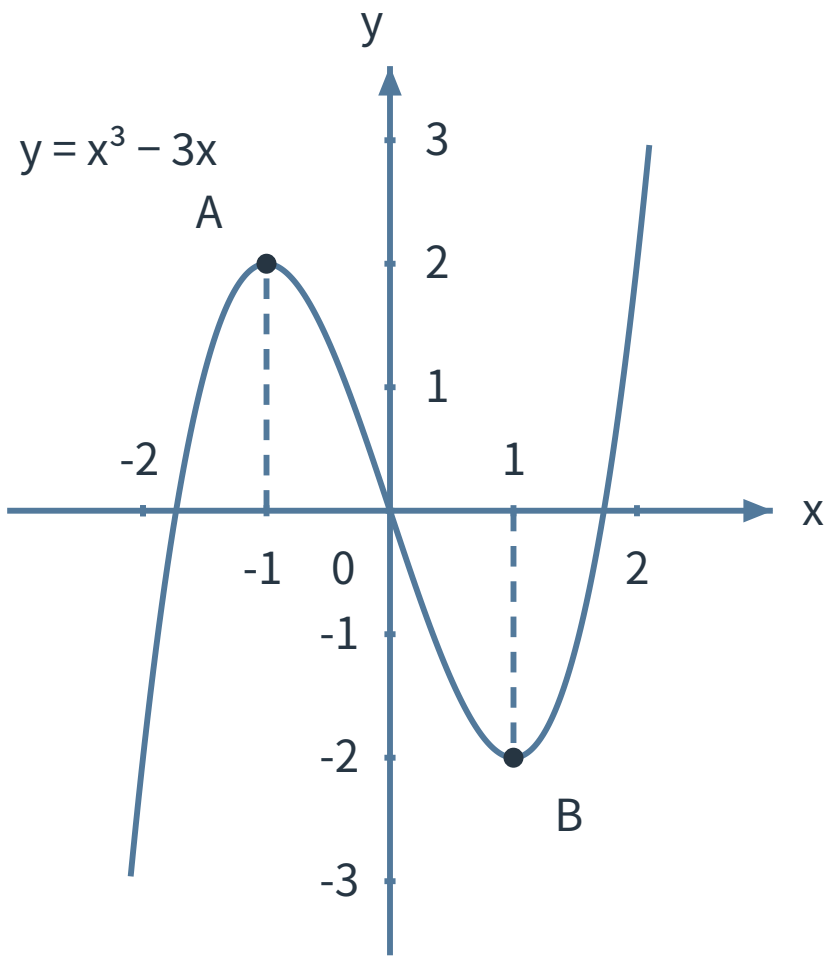

図 1　$f(x)=x^3-3x$の極値点$A(-1,2)$と$B(1,-2)$を示す図である。

極大・極小の定義

関数$f(x)$が$x=a$で定義され、aが定義域の内点であるとする。
ある$\delta>0$が存在して、開区間$(a-\delta,a+\delta)$が定義域に含まれ、その区間内のすべてのxについて$f(x)\leq f(a)$が成り立つとき、$f(a)$を$f(x)$の極大値という。
同様に、ある$\delta>0$が存在して、開区間$(a-\delta,a+\delta)$が定義域に含まれ、その区間内のすべてのxについて$f(x)\geq f(a)$が成り立つとき、$f(a)$を$f(x)$の極小値という。
この講では端点を極値に含めない。極値を取るxはaであり、極値は関数値$f(a)$である。また、グラフ上の点は$(a,f(a))$として区別する。
この定義では不等号に等号を含める。そのため、定数関数の各内点では、同じ関数値が極大値にも極小値にもなる。極大値と極小値を合わせて極値という。

極値を調べるときの視点

極値を調べるときは、次の順で確認する。
1. 定義域と調べる点が内点であるかを確認する。
2. その点で微分可能かを確認する。
3. 微分可能なら$f'(x)=0$となる点を候補として調べる。
4. 候補点の前後で導関数の符号が変化するかを確認する。
5. 最後に$f(a)$を求めて、極値を取るxと関数値を対応させる。

導関数の符号変化による判定は十分条件であり、必要条件ではない。内点aで微分可能な関数が極値を取る場合の必要条件は$f'(a)=0$である。符号変化判定の詳しい条件は後で確認する。

微分可能な極値では導関数が 0 になる理由

$x=a$が定義域の内点であり、$f(x)$がaで微分可能であるとする。また、aで極大値を取るとする。
極大の定義より、ある$\delta>0$が存在して、$0<h<\delta$では$f(a+h)\leq f(a)$である。このとき、差分商は次の不等式を満たす。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0$$

また、$-\delta<h<0$では$f(a+h)\leq f(a)$であり、分母が負になるため、差分商は次の不等式を満たす。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0$$

$f(x)$はaで微分可能であるため、左右から近づけた差分商の極限はともに$f'(a)$である。したがって、$f'(a)\leq 0$かつ$f'(a)\geq 0$であり、$f'(a)=0$である。
極小の場合は不等号の向きが逆になるが、左右の差分商の極限が一致する必要があるため、同様に$f'(a)=0$となる。

導関数が 0 でも極値とは限らない

内点で微分可能な関数が極値を取るなら$f'(a)=0$である。しかし、$f'(a)=0$であっても極値になるとは限らない。
例えば、$f(x)=x^3$では$f'(x)=3x^2$であり、$f'(0)=0$である。
しかし、$f(0)=0$に対して、どのように小さい近傍を考えても$x<0$では$f(x)<0$、$x>0$では$f(x)>0$となるため、$f(0)$より小さい値と大きい値が両方存在する。
したがって、$x=0$は極大でも極小でもない。

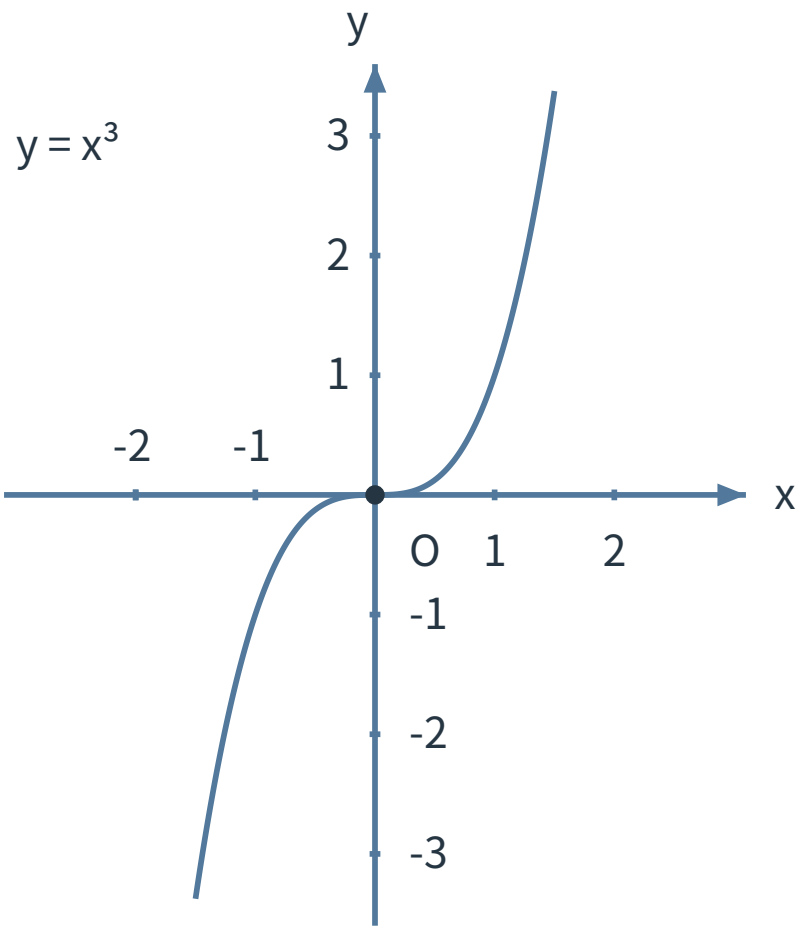

図 2　$f(x) = x^3$は原点で導関数が 0 でも極値を取らない。

微分できない点でも極値は存在する

極値を取る点は、必ずしも微分可能であるとは限らない。
例えば、$f(x) = |\ x\ |$を考えると、$x = 0$の近くでは常に$f(x) \geq f(0)$であり、$f(0) = 0$であるため、定義から$x = 0$で極小値0を取る。
一方、$x = 0$の左側では傾きが-1、右側では傾きが1となるため、左右の差分商が一致せず、$x = 0$では微分不可能である。
したがって、微分可能な場合だけでなく、微分不能点も極値の候補として調べる必要がある。
図 3 で$|\ x\ |$の尖った形と極小点を確認する。

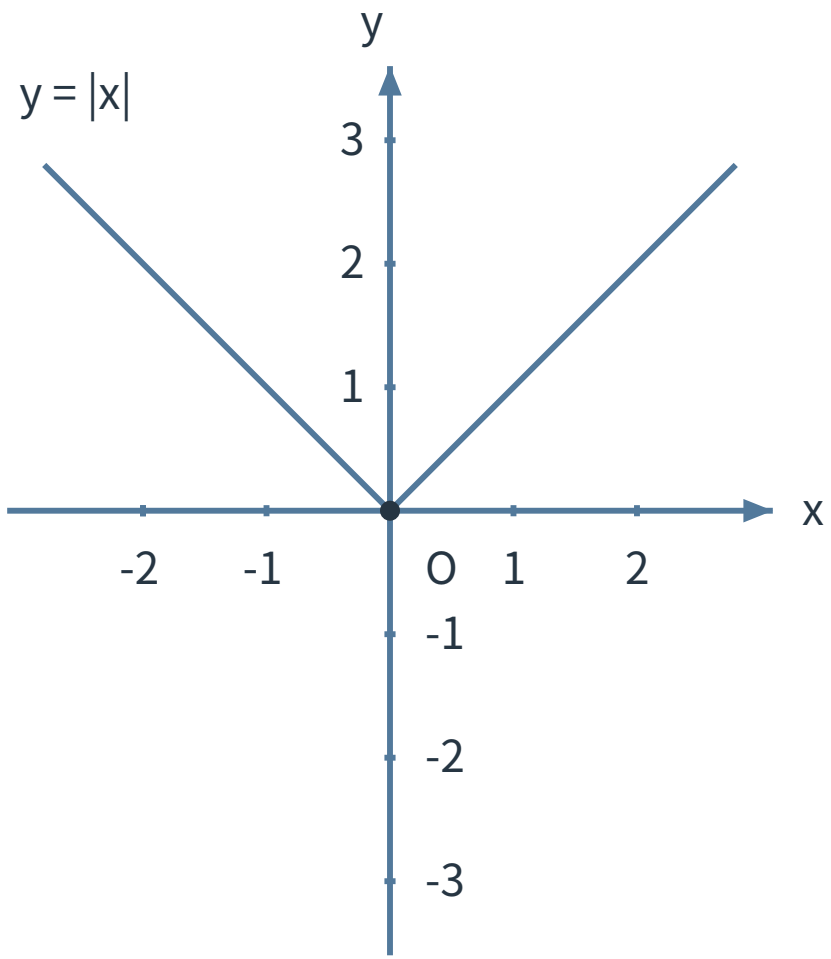

図 3　$f(x) = |\ x\ |$で点Oが微分不可の極小点となる図である。

導関数の符号変化から極値を判断する

関数$f(x)$がaで連続であり、ある$\delta > 0$について、$(a-\delta, a)$と$(a, a+\delta)$で微分可能であるとする。
このとき、左右とはこの 2 つの開区間での変化を表す。
aの左側で$f'(x) > 0$、右側で$f'(x) < 0$ならば、関数は増加から減少へ変化するため、$x = a$で極大値を取る。
aの左側で$f'(x) < 0$、右側で$f'(x) > 0$ならば、関数は減少から増加へ変化するため、$x = a$で極小値を取る。
これは極値を判断する十分条件である。
例えば、$f(x) = x^3 - 3x$では導関数が$f'(x) = 3(x+1)(x-1)$である。$x = -1, 1$の前後で導関数の符号を調べると、符号は$+, -, +$と変化する。
したがって、$x = -1$では増加から減少へ変化するため極大となり、$x = 1$では減少から増加へ変化するため極小となる。
また、この符号変化の考え方は、微分できない点である$f(x) = |\ x\ |$の極小判断にも利用できる。

	x<-1	x=-1	-1<x<1	x=1	x>1
導関数の符号	+	0	-	0	+

図 4　$3(x+1)(x-1)$の符号$+,-,+$による増減変化を示す図である。

例題 1

$f(x)=x^3-3x$について、極値を取るxとそのときの関数値を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

導関数を求めると、$f'(x)=3x^2-3$である。
因数分解すると、$f'(x)=3(x+1)(x-1)$となる。
$f'(x)=0$より、$x=-1,1$を得る。
符号を調べると、$x=-1$では$f'(x)$の符号が$+$から$-$へ変化するため、関数は増加から減少へ変化する。したがって、$x=-1$で極大を取る。
また、$x=1$では$f'(x)$の符号が$-$から$+$へ変化するため、関数は減少から増加へ変化する。したがって、$x=1$で極小を取る。
関数値を求めると、$f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2$であり、$f(1)=1^3-3=-2$である。
したがって、$x=-1$で極大値2、$x=1$で極小値-2を取る。

例題 2

$f(x)=e^x-x$について、極値を取るxとそのときの関数値を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

導関数を求めると、$f'(x)=e^x-1$である。
$f'(x)=0$より、$e^x=1$となるため$x=0$である。
$x<0$では$e^x<1$より$f'(x)<0$であり、関数は減少する。
$x>0$では$e^x>1$より$f'(x)>0$であり、関数は増加する。
したがって、$x=0$では減少から増加へ変化するため極小を取る。
関数値は$f(0)=e^0-0=1$である。
よって、$x=0$で極小値1を取る。極大値は存在しない。

例題 3

$f(x)=x\log x-x$について、定義域を$x>0$とする。また、$\log x$は底がeの自然対数を表すものとする。極値を取るxと、そのときの関数値を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

定義域は$x > 0$であり、$\log x$は自然対数を表す。
積の微分法を用いると、$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$となる。
整理すると、$f'(x) = \log x + 1 - 1 = \log x$である。
$f'(x) = 0$より、$\log x = 0$となるため$x = 1$である。
$0 < x < 1$では$\log x < 0$より$f'(x) < 0$であり、関数は減少する。
$x > 1$では$\log x > 0$より$f'(x) > 0$であり、関数は増加する。
したがって、$x = 1$で極小を取る。
関数値は$f(1) = 1 \log 1 - 1 = -1$である。
よって、$x = 1$で極小値-1を取る。極大値は存在しない。

練習問題 1

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$について、極値を取るxとそのときの関数値を求めなさい。

練習問題 2

$f(x) = x^4 - 4x^2$について、極大値と極小値を求めなさい。

練習問題 3

弧度法を用いる。$0 \leq x \leq 2\pi$で定義された$f(x) = \sin x + \cos x$について、端点を除く内点で極値を取るxと、そのときの関数値を求めなさい。

練習問題 4

$f(x) = e^x - 2x$について、極値を取るxとそのときの関数値を求めなさい。

練習問題 5

$f(x) = \frac{\log x}{x}$について、定義域を$x > 0$とする。また、$\log x$は底がeの自然対数を表すものとする。極値を取るxと、そのときの関数値を求めなさい。

練習問題 6

$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$について、定義域$x \neq 0$として極値を調べなさい。

練習問題 7

$f(x) = |\, x - 2 \,|$について、極値を調べなさい。また、その点で微分可能かどうかを答えなさい。

練習問題 8

$f(x)=x^3$について、極値を調べなさい。極値を取らない場合は、その理由を説明しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

導関数を求めると、$f'(x)=3x^2-12x+9$である。
因数分解すると、$f'(x)=3(x-1)(x-3)$となる。
$f'(x)=0$より、$x=1,3$を得る。
符号を調べると、$x=1$では$f'(x)$が+から−へ変化するため極大であり、$x=3$では$f'(x)$が−から+へ変化するため極小である。
関数値を求めると、$f(1)=1-6+9=4$、$f(3)=27-54+27=0$である。
したがって、$x=1$で極大値4、$x=3$で極小値0を取る。

練習問題 2 の解答・解説

導関数は$f'(x)=4x^3-8x$である。
因数分解すると、$f'(x)=4x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$となる。
$f'(x)=0$より、$x=-\sqrt{2},0,\sqrt{2}$を得る。
符号を調べると、次のようになる。

区間	$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2},0\right)$	$\left(0,\sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2},\infty\right)$
$f'(x)$の符号	−	+	−	+

したがって、$x=-\sqrt{2}$では極小、$x=0$では極大、$x=\sqrt{2}$では極小を取る。
関数値は$f(0)=0$である。
関数値は$f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^4-4\left(\sqrt{2}\right)^2=4-8=-4$である。
また、$f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^4-4\left(-\sqrt{2}\right)^2=-4$である。
よって、$x=0$で極大値0、$x=\pm\sqrt{2}$で極小値−4を取る。

練習問題 3 の解答・解説

導関数は$f'(x)=\cos x-\sin x$である。
これを$f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$と変形する。
$f'(x)=0$より、$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$であるから、$0\leq x\leq 2\pi$では$x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$が候補となる。
$x=\frac{\pi}{4}$の前後では$f'(x)$の符号が+から−へ変化するため極大である。
$x=\frac{5\pi}{4}$の前後では$f'(x)$の符号が−から+へ変化するため極小である。
三角関数の値を代入すると、次のようになる。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

したがって、$x=\frac{\pi}{4}$で極大値$\sqrt{2}$を取る。
また、$x=\frac{5\pi}{4}$で極小値$-\sqrt{2}$を取る。
端点$x=0,2\pi$はこの講で扱う内点の極値には含めない。

©ミライコーチング

練習問題 4 の解答・解説

導関数は$f'(x) = e^x - 2$である。
$f'(x) = 0$より、$e^x = 2$となるため$x = \log 2$である。ここで、logは自然対数を表す。
$x < \log 2$では$e^x < 2$より$f'(x) < 0$であり、関数は減少する。
$x > \log 2$では$e^x > 2$より$f'(x) > 0$であり、関数は増加する。
したがって、$x = \log 2$で極小を取る。
関数値は$f(\log 2) = e^{\log 2} - 2\log 2 = 2 - 2\log 2$である。
よって、$x = \log 2$で極小値$2 - 2\log 2$を取り、極大値は存在しない。

練習問題 5 の解答・解説

定義域は$x > 0$であり、$\log x$は自然対数を表す。
商の微分法を用いると、導関数は次のように計算できる。

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$より、$1 - \log x = 0$であるから$x = e$である。
$0 < x < e$では$\log x < 1$より$f'(x) > 0$であり、関数は増加する。
$x > e$では$\log x > 1$より$f'(x) < 0$であり、関数は減少する。
したがって、$x = e$で極大を取る。
関数値は$f(e) = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$である。
よって、$x = e$で極大値$\frac{1}{e}$を取り、極小値は存在しない。

練習問題 6 の解答・解説

定義域は$x \neq 0$であるため、$x = 0$は調べる対象ではない。
$f(x) = x + \frac{1}{x}$と変形すると、導関数は$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$である。
$f'(x) = 0$より、$x^2 = 1$となるため$x = -1, 1$である。
$(-\infty, -1)$では$f'(x) > 0$、$(-1, 0)$では$f'(x) < 0$であるため、$x = -1$では+から−へ変化し、極大となる。
$(0, 1)$では$f'(x) < 0$、$(1, \infty)$では$f'(x) > 0$であるため、$x = 1$では−から+へ変化し、極小となる。
関数値は$f(-1) = -2$、$f(1) = 2$である。
したがって、$x = -1$で極大値−2、$x = 1$で極小値2を取る。

練習問題 7 の解答・解説

$f(x) = |\, x - 2\,|$について、定義から$f(x) \geq 0 = f(2)$であるため、$x = 2$で極小値0を取る。
$x < 2$では$f(x) = 2 - x$であり、傾きは−1である。また、$x > 2$では$f(x) = x - 2$であり、傾きは1である。
したがって、$x = 2$では左右の差分商が−1と1になり、微分不可能である。
よって、$x = 2$で極小値0を取るが、極大値は存在しない。

練習問題 8 の解答・解説

導関数は$f'(x) = 3x^2$である。
$f'(x) = 0$より、$x = 0$だけが微分可能な極値候補となる。
しかし、任意の小さい$h < 0$では$h^3 < 0$であり、$h > 0$では$h^3 > 0$である。
$f(0) = 0$に対して、0のどの近傍にも$f(0)$より小さい値と大きい値が存在するため、極大の条件も極小の条件も満たさない。
したがって、定義より$f(x) = x^3$は極値を持たない。