

第 52 講 方べきの定理

学習目標

- ・円内で交わる 2 本の弦について、線分の積が等しくなる関係を使える。
- ・円外の 1 点から引いた 2 本の割線について、「外側部分×全体」の関係を使える。
- ・円外の 1 点から引いた接線と割線について、「接線長の 2 乗」と「外側部分×全体」の関係を使える。
- ・図の配置を見て、どの長さどうしを掛けるか正しく判断できる。

方べきの定理は「同じ点から円を見る」ときの積の関係

3 つの基本配置

円と直線の位置によって、方べきの定理には次の 3 つの基本配置があります。

1. 円の内部の点で 2 本の弦が交わる。
2. 円の外部の 1 点から 2 本の割線を引く。
3. 円の外部の 1 点から接線と割線を引く。

どの場合も、ある 1 つの点を基準にして線分の積を考えます。

ただし、掛ける長さの選び方は配置によって異なります。

最初に配置を見分ける

方べきの定理では、式を先に覚えるのではなく、

- ・基準となる点が円の内側か外側か
- ・直線が弦か、割線か、接線か

を先に確認します。

円内で交わる 2 本の弦

交点から円周までの 4 本を見る

円の内部に点 P があり、2 本の弦 AB と CD が点 P で交わっているとします。
点の並びを、

$$A - P - B$$

$$C - P - D$$

とします。

このとき、交点 P から円周までの 4 本の長さに、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

という関係があります。

円内で交わる 2 弦の方べき

2 本の弦 AB, CD が円の内部の点 P で交わるとき、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立ちます。

円内では左右の長さを掛ける

円内の交点 P では、
一方の弦の 2 つの部分の積 = もう一方の弦の 2 つの部分の積
です。
つまり、

$$PA \times PB = PC \times PD$$

と考えます。

弦全体の長さを掛けない

円内で 2 弦が交わる場合は、 AB や CD という弦全体を使うのではありません。
交点 P から円周までの 4 本、
 PA, PB, PC, PD
を使います。

円外の 1 点から 2 本の割線を引く**外側部分と全体を区別する**

円の外部に点 P があり、そこから 2 本の割線を引きます。
1 本目は、点 P から近い順に、

$$P - A - B$$

と円を通るとします。
もう 1 本は、

$$P - C - D$$

と円を通るとします。
このとき、

- PA は 1 本目の外側部分
- PB は 1 本目の全体
- PC は 2 本目の外側部分
- PD は 2 本目の全体

です。
方べきの定理より、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

となります。

円外の 2 割線の方べき

円外の点 P から 2 本の割線 PAB, PCD を引くとき、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立ちます。

ここで A, C は P に近い円周上の点、 B, D は遠い円周上の点です。

割線では外側部分×全体

円外の点から割線を引く場合は、
外側部分 × 全体
 を作ります。
 したがって、

$$PA \cdot PB$$

であって、

$$PA \cdot AB$$

ではありません。

PB は円の中だけの長さではない

点の並びが $P - A - B$ のとき、
 PA は円の外側部分です。
 一方、 PB は P から遠い円周上の点 B までの長さなので、

$$PB = PA + AB$$

です。

AB は円の内部にある部分だけなので、 PB と取り違えないようにします。

接線と割線の関係**接線は同じ長さを 2 回掛ける**

円の外部の点 P から、接線 PT と割線 PAB を引きます。
 T は接点で、割線上の点の並びは、

$$P - A - B$$

です。

このとき、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

が成り立ちます。

左辺の PT^2 は、

$$PT \cdot PT$$

という意味です。

右辺は、割線についての

外側部分 × 全体

です。

接線と割線の方べき

円外の点 P から接線 PT と割線 PAB を引くとき、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

が成り立ちます。

接線長の 2 乗と外側部分×全体

接線と割線の配置では、

$$\text{接線長の 2 乗} = \text{割線の外側部分} \times \text{割線全体}$$

です。

つまり、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

です。

PA×AB ではない

接線と割線の問題で最も注意したいのは、

$$PT^2 = PA \cdot AB$$

としてしまうことです。

正しくは、 PA が外側部分、 PB が割線全体なので、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

です。

3 つの配置を見分ける**掛ける長さを配置から決める**

方べきの定理を使うときは、次の表で整理します。

配置	使う関係
円内で 2 弦が交わる	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
円外から 2 本の割線	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
円外から接線と割線	$PT^2 = PA \cdot PB$

最初の 2 つは式の形が同じですが、線分の意味が異なります。

円内では、交点から円周までの **2 つの部分** を掛けます。

円外の割線では、**外側部分×全体** を掛けます。

判断の手順

1. 基準となる点 P が円の内側か外側かを見る。
2. 円内なら、各弦について P から両側の円周までの長さを掛ける。
3. 円外で 2 本とも割線なら、それぞれ「外側部分×全体」を作る。
4. 円外で接線があれば、「接線長の 2 乗」と「外側部分×全体」を等しくする。

全体の長さを先に求める場合**外側部分と円内部分から全体を作る**

割線上の点が、

$$P - A - B$$

の順に並んでいるとします。

$PA = 3$ 、 $AB = 5$ と分かっている場合、割線全体 PB は、

$$PB = 3 + 5 = 8$$

です。
方べきの定理へ代入するときは、

$$PA \cdot PB = 3 \cdot 8$$

とします。
 $3 \cdot 5$ ではありません。

割線全体を作る

点の並びが $P - A - B$ のとき、

$$PB = PA + AB$$

です。
数値問題では、方べきの式を書く前に「外側部分」と「全体」を明確にするとミスを防げます。

例題

例題 1

円の内部の点 P で 2 本の弦 AB, CD が交わっています。
点の並びは $A - P - B, C - P - D$ で、

$$PA = 3, \quad PB = 8, \quad PC = 4$$

です。
 PD を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

円内で 2 本の弦が交わっているので、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

です。
数値を代入すると、

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot PD$$

です。
したがって、 $24 = 4PD$ より、 $PD = 6$ です。

例題 2

円の外部の点 P から 2 本の割線 PAB, PCD を引きます。
点の並びは $P - A - B, P - C - D$ です。

$$PA = 3, \quad AB = 5, \quad PC = 2$$

であるとき、 PD を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

1 本目の割線では、

$$PB = PA + AB = 3 + 5 = 8$$

です。

円外の 2 本の割線なので、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

です。

したがって、

$$3 \cdot 8 = 2 \cdot PD$$

です。

よって、 $PD = 12$ です。

例題 3

円の外部の点 P から、接線 PT と割線 PAB を引きます。

点の並びは $P - A - B$ で、

$$PA = 4, \quad AB = 5$$

です。

接線の長さ PT を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

まず、割線全体は、

$$PB = PA + AB = 4 + 5 = 9$$

です。

接線と割線の方べきより、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

です。

したがって、

$$PT^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

です。

長さは正なので、 $PT = 6$ です。

演習問題

練習問題 1

円の内部の点 P で 2 本の弦 AB, CD が交わっています。

$$PA = 2, \quad PB = 12, \quad PC = 3$$

のとき、 PD を求めなさい。

練習問題 2

円の内部の点 P で 2 本の弦 AB, CD が交わっています。

$$PA = 5, \quad PB = 6, \quad PC = 10$$

のとき、 PD を求めなさい。

練習問題 3

円の外部の点 P から 2 本の割線 PAB, PCD を引きます。

点の並びは $P-A-B$ 、 $P-C-D$ です。

$$PA = 4, \quad PB = 10, \quad PC = 5$$

のとき、 PD を求めなさい。

練習問題 4

円の外部の点 P から 2 本の割線 PAB, PCD を引きます。

$$PA = 3, \quad AB = 9$$

$$PC = 4, \quad CD = 5$$

です。

この 4 つの長さが方べきの定理の関係を満たしているか確認しなさい。

練習問題 5

円の外部の点 P から、接線 PT と割線 PAB を引きます。

$$PA = 5, \quad PB = 20$$

のとき、 PT を求めなさい。

練習問題 6

円の外部の点 P から、接線 PT と割線 PAB を引きます。

点の並びは $P-A-B$ で、

$$PT = 8, \quad PA = 4$$

です。

PB と AB を求めなさい。

練習問題 7

円の外部の点 P から 2 本の割線 PAB, PCD を引きます。

$$PA = 2, \quad AB = 6$$

$$PC = 2, \quad CD = x$$

のとき、 x を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、点の並びが $P - A - B$ で、

$$PA = 3, \quad AB = 7$$

のとき、割線について使う積を

$$PA \cdot AB = 3 \cdot 7$$

としました。

この考えの誤りを説明し、方べきの定理で使う正しい積を求めなさい。

練習問題 9

次の各場面で、方べきの定理に使う式を答えなさい。

- (1) 円の内部の点 P で弦 AB と弦 CD が交わる。
- (2) 円の外部の点 P から割線 PAB と割線 PCD を引く。
- (3) 円の外部の点 P から接線 PT と割線 PAB を引く。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

円内で 2 本の弦が交わるので、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

です。

したがって、

$$2 \cdot 12 = 3 \cdot PD$$

です。

よって、 $PD = 8$ です。

練習問題 2 の解答・解説

方べきの定理より、

$$5 \cdot 6 = 10 \cdot PD$$

です。

したがって、 $30 = 10PD$ より、 $PD = 3$ です。

練習問題 3 の解答・解説

円外の 2 本の割線なので、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

です。

したがって、

$$4 \cdot 10 = 5 \cdot PD$$

です。

よって、 $PD = 8$ です。

練習問題 4 の解答・解説

1 本目の割線全体は、

$$PB = PA + AB = 3 + 9 = 12$$

です。

2 本目の割線全体は、

$$PD = PC + CD = 4 + 5 = 9$$

です。

それぞれの「外側部分×全体」を計算すると、

$$PA \cdot PB = 3 \cdot 12 = 36$$

です。

また、

$$PC \cdot PD = 4 \cdot 9 = 36$$

です。

2 つの積が等しいので、方べきの定理の関係を満たしています。

練習問題 5 の解答・解説

接線と割線の方べきより、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

です。

したがって、

$$PT^2 = 5 \cdot 20 = 100$$

です。

長さは正なので、 $PT = 10$ です。

練習問題 6 の解答・解説

接線と割線の方べきより、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

です。

したがって、

$$8^2 = 4 \cdot PB$$

です。

よって、 $PB = 16$ です。

点の並びは $P - A - B$ なので、

$$AB = PB - PA = 16 - 4 = 12$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

1 本目の割線全体は、

$$PB = 2 + 6 = 8$$

です。

2 本目では、

$$PD = 2 + x$$

です。

方べきの定理より、

$$2 \cdot 8 = 2(2 + x)$$

です。

したがって、

$$16 = 4 + 2x$$

となります。

したがって、

$$2x = 12$$

より、 $x = 6$ です。

練習問題 8 の解答・解説

円外から引いた割線では、

外側部分×**円内部分**

ではなく、

外側部分×**割線全体**

を使います。

点の並びが $P - A - B$ なので、

$$PB = PA + AB = 3 + 7 = 10$$

です。

したがって、方べきの定理で使う積は、

$$PA \cdot PB = 3 \cdot 10 = 30$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

(1) 円内で 2 弦が交わるので、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

です。

(2) 円外から 2 本の割線を引くので、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

です。

この場合、 PA, PC は外側部分、 PB, PD はそれぞれ割線全体です。

(3) 接線と割線なので、

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

です。

ここで、 PA は割線の外側部分、 PB は割線全体です。