第 215 講 曲線とx軸で囲まれた面積

学習目標

- 曲線とx軸だけで囲まれる領域について、x軸との交点から積分区間を決められる。
- 符号付きの定積分と幾何的な面積の違いを説明できる。
- 区間内の零点と関数の符号を調べ、必要な位置で区間を分けて面積を求められる。
- 零点を持つことと符号が変化することを区別し、接する零点で不要な符号反転をしない。
- 有理関数、三角関数、指数関数、対数関数でも、定義域と符号を確認して面積を求められる。
- 面積と符号付き定積分の関係を示し、等号成立の必要十分条件を説明できる。

曲線とx軸の間の面積

実数$a < b$とし、関数fは閉区間$[a, b]$で連続であるとする。曲線$y = f(x)$とx軸の間の縦の長さは$| f(x) |$である。したがって、この区間での幾何的な面積Sは

$$S = \int_a^b | f(x) | \, dx$$

で表される。
区間全体で$f(x) \geq 0$なら、面積は

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$

である。区間全体で$f(x) \leq 0$なら、面積は

$$S = -\int_a^b f(x) \, dx$$

である。曲線がx軸を横切る場合は、符号が変化する点で区間を分け、各部分の面積を非負の量として加える。

符号付きの量を面積へ直す

定積分

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

は、x軸より上側の部分を正、下側の部分を負として加える。上側の面積をA、下側の面積の大きさをBとすれば、符号付き定積分は$A - B$であり、幾何的な総面積は$A + B$である。
したがって、関数の符号が変わる場合には、積分を 1 回だけ行って最後に絶対値を取っても総面積にならないことがある。$| A - B |$では、上側と下側の一部が打ち消されたままだからである。
曲線とx軸だけで囲まれた領域を求める問題では、領域の左右端は原則としてx軸との交点から決まる。問題文にない垂直な境界を補ってはいけない。交点を求めた後、各交点の間で関数の符号を確定させることが、面積計算の出発点である。

©ミライコーチング

零点があっても符号が変わるとは限らない

連続関数がある点の前後で正負を変えるなら、その点で関数値は 0 になる。したがって、零点の存在は符号変化に必要である。
しかし、零点の存在だけでは符号変化の十分条件ではない。グラフがx軸に接するだけなら、零点の前後で符号が変わらないことがある。
多項式では、零点の重複度が奇数なら前後で符号が変わり、偶数なら符号が変わらない。多項式以外ではこの言い方を機械的に使わず、式の性質や各区間の値から符号を確認する必要がある。

面積を求める判断手順

1. 関数の定義域と、考える区間での連続性を確認する。
2. $f(x)=0$を解き、曲線とx軸の交点を求める。
3. 零点を小さい順に並べ、各開区間で$f(x)$の符号を判定する。
4. 上側では$\int f(x)\,dx$、下側では$-\int f(x)\,dx$として各部分の面積を求める。
5. 得られた非負の面積を加える。

有理関数では分母が 0 にならないこと、三角関数では区間内の零点をすべて拾うこと、指数関数では$e^x>0$であること、対数関数では真数条件を先に確認することが必要である。

©ミライコーチング

例題

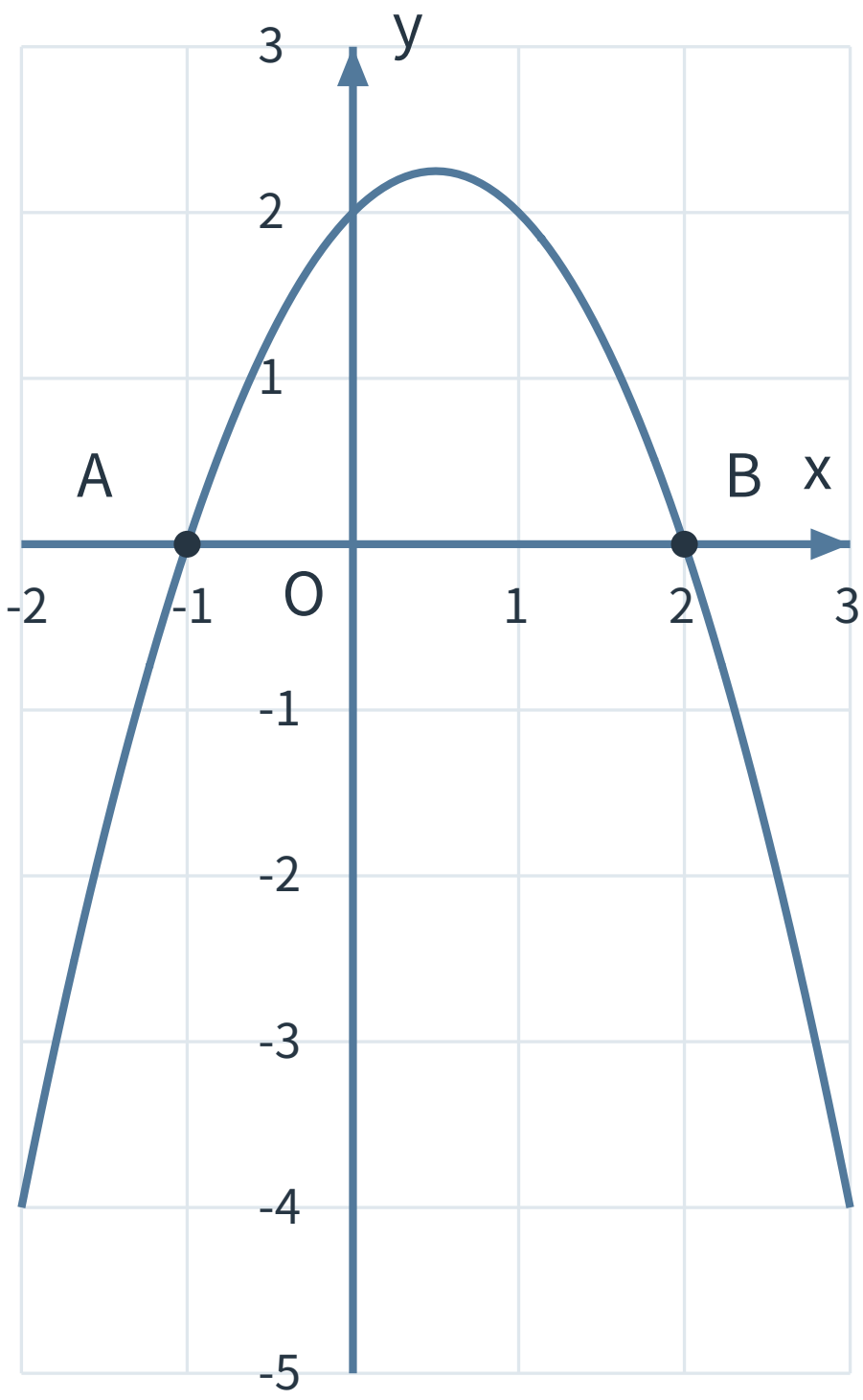

図 1　$f(x) = -x^2 + x + 2$（実線）とx軸の交点は$A(-1, 0)$、$B(2, 0)$であり、その間に 1 つの領域がある

例題 1：多項式の 1 つの領域

曲線$y = -x^2 + x + 2$とx軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

例題 1 の解答・解説

問題文に垂直な境界はないため、まずx軸との交点を求める。

$$-x^2 + x + 2 = (x+1)(2-x)$$

であるから、零点は$x = -1, 2$である。$-1 < x < 2$では$x+1 > 0$かつ$2-x > 0$なので、

$$-x^2 + x + 2 > 0$$

となる。したがって、この区間では曲線がx軸の上側にあり、定積分の値がそのまま面積になる。

$$S = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx$$

計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

したがって、求める面積は$\frac{9}{2}$である。

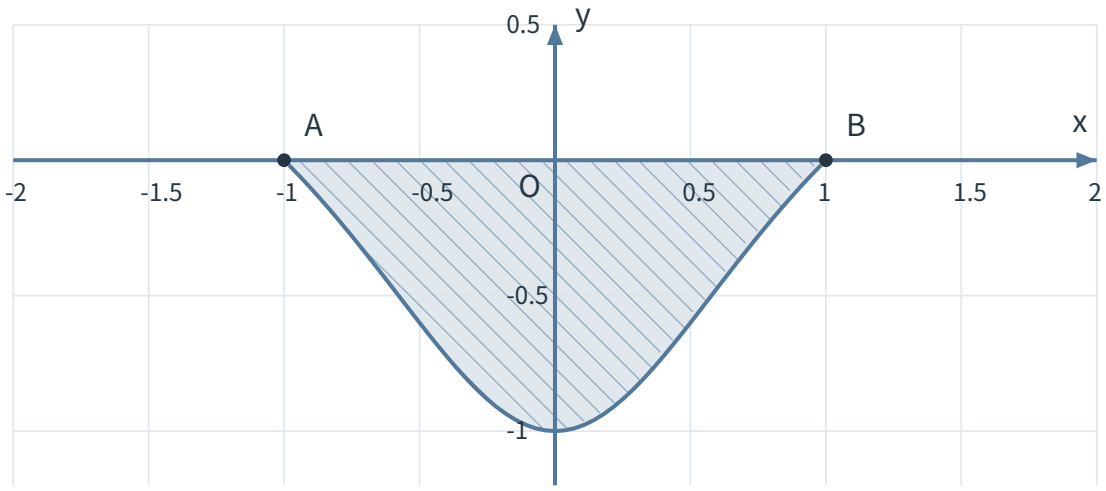

図 2　$g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$（実線）と$x$軸で囲まれる斜線領域

例題 2：x軸の下側にある有理関数

曲線

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

とx軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

例題 2 の解答・解説

分母について$x^2 + 1 > 0$がすべての実数で成り立つため、この関数は実数全体で定義され連続である。分子が 0 になる点を求めると、零点は$x = -1, 1$である。
$-1 < x < 1$では$x^2 - 1 < 0$であり、分母は正なので、曲線はx軸の下側にある。したがって、面積は符号を反転して

$$S = -\int_{-1}^{1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$$

となる。面積の被積分関数を

$$-\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + 1} - 1$$

と変形する。この関数は偶関数なので、

$$S = 4\int_{0}^{1} \frac{1}{1 + x^2}\, dx - 2$$

となる。ここで$x = \tan t$と置く。微分公式と三角関数の相互関係から、

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t}\, dt, \qquad 1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

である。端点は、$x = 0$のとき$t = 0$、$x = 1$のとき$t = \frac{\pi}{4}$である。よって、

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{1}{1 + x^2}\, dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}\, dt \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1\, dt \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}S &= 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \\ &= \pi - 2\end{aligned}$$

である。求める面積は$\pi - 2$である。

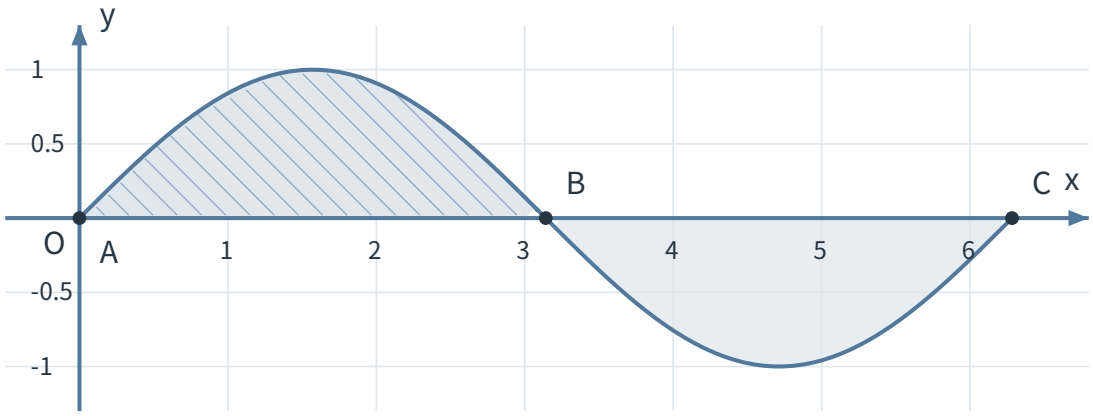

図 3　$h(x)=\sin x$（実線）とx軸で囲まれる 2 領域。交点のx座標は0、π、2π

例題 3：三角関数の 2 つの領域

$0 \le x \le 2\pi$において、曲線$y=\sin x$とx軸で囲まれる 2 つの領域の総面積を求めよ。また、同じ区間での符号付き定積分の値と比較せよ。

例題 3 の解答・解説

区間$0 \le x \le 2\pi$での零点は$x=0, \pi, 2\pi$である。
$0<x<\pi$では$\sin x>0$、$\pi<x<2\pi$では$\sin x<0$である。したがって、総面積は

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx$$

である。計算すると、

$$\begin{aligned}S&=[-\cos x]_0^{\pi}-[-\cos x]_{\pi}^{2\pi}\\&=2+2\\&=4\end{aligned}$$

となる。一方、符号付き定積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin x\,dx&=[-\cos x]_0^{2\pi}\\&=0\end{aligned}$$

である。よって、総面積は4、符号付き定積分は0であり、両者は一致しない。
また、$\sin(x+\pi)=-\sin x$であるため、2 つの領域の面積が等しいことを利用し、

$$S=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=4$$

としてもよい。ただし、対称性を使う前に、$x=\pi$で符号が変化することを確認する必要がある。

演習問題

演習 1：正の多項式領域

曲線$y = 2x(4 - x)$とx軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

演習 2：負の多項式領域

曲線$y = x^2 - 8x + 7$とx軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

演習 3：接する零点

$0 \leq x \leq 2\pi$において、曲線$y = 1 - \cos x$とx軸で囲まれた領域の面積を求めよ。端点で符号が変わるかも説明せよ。

演習 4：符号変化と接点

曲線$y = (x + 1)x(x - 2)^2$とx軸で囲まれるすべての有界領域の総面積を求めよ。

演習 5：指数関数を含む曲線

曲線$y = x(x - 2)e^x$とx軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

演習 6：対数関数と置換積分

ここで$\ln x$は自然対数とする。曲線

$$y = \frac{(\ln x)(1 - \ln x)}{x}$$

とx軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

演習 7：三角関数の複数領域

$0 \leq x \leq \pi$において、曲線$y = \sin 2x$とx軸で囲まれる 2 つの領域の総面積と、同じ区間での符号付き定積分をそれぞれ求めよ。

©ミライコーチング

演習 8：面積と符号付き定積分の等号条件

実数$a < b$とし、関数fは閉区間$[a, b]$で連続である。曲線$y = f(x)$とx軸の間の面積を

$$S = \int_a^b | f(x) | dx$$

とする。
(1) 次の不等式を示せ。

$$S \geq \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

(2) 等号が成り立つための必要十分条件が、$f(x) \geq 0$が区間全体で成り立つこと、または$f(x) \leq 0$が区間全体で成り立つことであることを示せ。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

零点は$x = 0, 4$である。$0 < x < 4$では$x > 0$かつ$4 - x > 0$なので、$2x(4 - x) > 0$である。したがって、面積はそのまま積分して求められる。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 2x(4 - x)\, dx \\ &= \int_0^4 \left(8x - 2x^2\right) dx \\ &= \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 \\ &= 64 - \frac{128}{3} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

したがって、求める面積は$\frac{64}{3}$である。

演習 2 の解答・解説

因数分解すると、

$$x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$$

である。零点は$x = 1, 7$であり、$1 < x < 7$では$x - 1 > 0$、$x - 7 < 0$なので関数は負である。したがって、面積を求めるには符号を反転する。

$$\begin{aligned} S &= -\int_1^7 (x^2 - 8x + 7)\,dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x\right]_1^7 \\ &= -\left(-\frac{98}{3} - \frac{10}{3}\right) \\ &= 36 \end{aligned}$$

したがって、求める面積は36である。

演習 3 の解答・解説

すべての実数xについて$-1 \leq \cos x \leq 1$であるから、

$$1 - \cos x \geq 0$$

である。区間$0 \leq x \leq 2\pi$で 0 になるのは$x = 0, 2\pi$であり、内部では正である。どちらの零点でもグラフはx軸に接し、関数の符号は変わらない。
よって、面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)\,dx \\ &= [x - \sin x]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる。求める面積は2πであり、端点はいずれも接する零点なので符号は変わらない。

演習 4 の解答・解説

零点は$x=-1,0,2$であり、$x=2$は二重根である。
$-1<x<0$では$x+1>0$、$x<0$、$(x-2)^2>0$なので関数は負である。$0<x<2$では 3 つの因子がすべて非負で、内部では正である。$x=2$ではx軸に接するだけで、符号は変わらない。
展開すると、

$$(x+1)x(x-2)^2=x^4-3x^3+4x$$

である。原始関数を

$$F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}+2x^2$$

とおく。左側の符号付き定積分は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}f(x)\,dx&=F(0)-F(-1)\\&=-\frac{21}{20}\end{aligned}$$

である。右側は

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}f(x)\,dx&=F(2)-F(0)\\&=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

である。したがって、総面積は

$$\begin{aligned}S&=\frac{21}{20}+\frac{12}{5}\\&=\frac{69}{20}\end{aligned}$$

となる。求める総面積は$\frac{69}{20}$である。

演習 5 の解答・解説

すべての実数xについて$e^x > 0$であるため、関数の符号は$x(x-2)$で決まる。零点は$x = 0, 2$であり、$0 < x < 2$では$x > 0$、$x - 2 < 0$なので関数は負である。
積の微分を逆に用いると、

$$\frac{d}{dx}\{e^x(x-2)^2\} = e^x x(x-2)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^2 x(x-2)e^x \, dx \\ &= -\left[e^x(x-2)^2\right]_0^2 \\ &= -(0-4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。求める面積は4である。部分積分を 2 回行って同じ原始関数を求めてもよいが、面積の符号を決める根拠は$e^x > 0$であることである。

演習 6 の解答・解説

対数の真数条件から定義域は$x > 0$である。零点は$\ln x = 0, 1$より$x = 1, e$である。$1 < x < e$では$0 < \ln x < 1$なので、

$$\frac{(\ln x)(1-\ln x)}{x} > 0$$

となる。
$u = \ln x$と置くと、$du = \frac{1}{x}\,dx$である。端点は、$x = 1$のとき$u = 0$、$x = e$のとき$u = 1$である。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \frac{(\ln x)(1-\ln x)}{x} \, dx \\ &= \int_0^1 u(1-u) \, du \\ &= \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。求める面積は$\frac{1}{6}$である。

演習 7 の解答・解説

$0 \leq x \leq \pi$での零点は$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$である。$0 < x < \frac{\pi}{2}$では$\sin 2x > 0$、$\frac{\pi}{2} < x < \pi$では$\sin 2x < 0$である。
したがって、総面積は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x \, dx$$

である。各部分を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1, \\ -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x \, dx &= -\left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって、総面積は2である。
一方、符号付き定積分は

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって、総面積は2、符号付き定積分は0である。$\sin(2(\pi - x)) = -\sin 2x$から左右の面積が等しいことを利用してもよい。

演習 8 の解答・解説

fの正の部分と負の部分の大きさを

$$P(x) = \max(f(x), 0), \qquad N(x) = \max(-f(x), 0)$$

とおく。fは連続であるため、P, Nも連続な非負関数である。また、

$$f(x) = P(x) - N(x), \qquad | \, f(x) \, | = P(x) + N(x)$$

である。さらに、

$$A = \int_a^b P(x) \, dx, \qquad B = \int_a^b N(x) \, dx$$

とおくと、$A, B \geq 0$である。
(1) 面積と符号付き定積分は、それぞれ

$$S = A + B, \qquad \int_a^b f(x) \, dx = A - B$$

と表される。$A, B \geq 0$より、

$$A + B \geq | \, A - B \, |$$

である。したがって、

$$S \geq \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

が成り立つ。
(2) $A+B=|\,A-B\,|$が成り立つための必要十分条件は、$A=0$または$B=0$である。
$A=0$とする。Pは連続かつ非負であるため、もしある点で$P(x)>0$なら、その点の近くでも正となり、定積分Aは正になる。これは$A=0$に反する。よって、区間全体で$P(x)=0$、すなわち$f(x)\leq 0$である。
同様に、$B=0$なら区間全体で$N(x)=0$、すなわち$f(x)\geq 0$である。
逆に、区間全体で$f(x)\geq 0$なら$N(x)=0$であり、区間全体で$f(x)\leq 0$なら$P(x)=0$である。どちらの場合も等号が成り立つ。
したがって、等号成立の必要十分条件は、fが区間全体で非負であるか、区間全体で非正であることである。