

第 76 講 遊びの中にある数学

学習目標

- ・ 石取りゲームのルールを、整数の状態と操作として整理できる。
- ・ 終了状態から逆向きに考え、必勝状態と必敗状態を見つけられる。
- ・ 1 回に 1 個または 2 個取るゲームで、3 の倍数が重要になる理由を説明できる。
- ・ 先手が勝てる状態では、相手に 3 の倍数を残す手を選ぶ。
- ・ 相手が取った個数に応じて、自分との合計が 3 個になるように取る戦略を使える。

石取りゲームを数学として見る

ゲームのルールを明確にする

次の石取りゲームを考える。

- ・ 石が何個か置かれている。
- ・ 2 人が交互に石を取る。
- ・ 1 回の手番では、石を 1 個または 2 個取る。
- ・ 最後の石を取った人が勝つ。
- ・ 石の個数は常に 2 人から見えている。
- ・ 2 人とも同じ選択肢をもち、相手も最善の手を選ぶものとする。

このゲームには偶然によって決まる要素がない。

そのため、石が何個残っているかを整理すれば、「その状態から勝てるか」を数学的に調べられる。

状態を石の個数で表す

このゲームでは、手番の人の前に石が何個残っているかを 1 つの整数で表せる。

たとえば、

- ・ 石が 5 個残っている状態
- ・ 石が 4 個残っている状態
- ・ 石が 3 個残っている状態

のように考える。

ゲームの複雑な見た目ではなく、残っている石の個数に注目することが出発点である。

終了状態から逆向きに考える

0 個から考え始める

自分の手番になったとき、石が 0 個であったとする。

すでに相手が最後の石を取っているので、自分は石を取れない。

したがって、この状態では自分は負けている。

ここから逆向きに、石が 1 個、2 個、3 個と増やして考える。

必勝状態と必敗状態

相手も最善の手を選ぶものとする。

自分の手番で、正しく石を取れば必ず勝てる状態を**必勝状態**という。

どのように石を取っても、相手が正しく応じれば負ける状態を**必敗状態**という。

逆向きの判断

状態を判断するときは、次の 2 点を見る。

- ・ 相手を必敗状態へ移せる手が 1 つでもあれば、その状態は必勝状態である。
- ・ どの手を選んでも相手を必勝状態へ移してしまうなら、その状態は必敗状態である。

石が 1 個、2 個、3 個の場合

小さい状態から確かめる

石が 1 個の場合、自分が 1 個取れば最後の石を取れる。

したがって、1 個の状態は必勝状態である。

石が 2 個の場合、自分が 2 個取れば最後の石を取れる。

したがって、2 個の状態も必勝状態である。

石が 3 個の場合を考える。

- ・ 1 個取ると、相手に 2 個残る。
- ・ 2 個取ると、相手に 1 個残る。

1 個の状態も 2 個の状態も、手番の人が勝てる状態である。

したがって、3 個の状態では、どちらを選んでも相手に必勝状態を渡してしまう。

よって、3 個の状態は必敗状態である。

石の個数	取れる個数	相手に残る個数	状態
0	取れない	なし	必敗
1	1	0	必勝
2	1 または 2	1 または 0	必勝
3	1 または 2	2 または 1	必敗

4 個、5 個、6 個へ広げる

3 個の必敗状態を利用する

石が 4 個の場合、自分が 1 個取ると相手に 3 個残せる。

3 個は必敗状態なので、4 個は必勝状態である。

石が 5 個の場合、自分が 2 個取ると相手に 3 個残せる。

したがって、5 個も必勝状態である。

石が 6 個の場合は、

- ・ 1 個取ると相手に 5 個残る。
- ・ 2 個取ると相手に 4 個残る。

4 個も 5 個も必勝状態である。

したがって、6 個は必敗状態である。

石の個数	状態	必勝状態なら最初に取り取る個数
0	必敗	なし
1	必勝	1
2	必勝	2
3	必敗	なし
4	必勝	1
5	必勝	2
6	必敗	なし

石の個数	状態	必勝状態なら最初に取り取る個数
7	必勝	1
8	必勝	2
9	必敗	なし

3 個ごとに同じ形が現れる

表を見ると、必敗状態は、

$$0, 3, 6, 9, \dots$$

と並ぶ。

つまり、3 の倍数が必敗状態になっている。

一方、3 の倍数より 1 個多い状態では 1 個取り、2 個多い状態では 2 個取れば、相手に 3 の倍数を残せる。

なぜ 3 の倍数を残すのか

相手が何個取っても元に戻せる

相手に 3 の倍数の石を残したとする。

相手が 1 個取った場合、自分は 2 個取る。

相手が 2 個取った場合、自分は 1 個取る。

すると、相手と自分が 1 回ずつ石を取る間に、合計で必ず 3 個の石が減る。

相手を取る個数	自分を取る個数	合計
1	2	3
2	1	3

したがって、自分の手番が終わるたびに、相手には再び 3 の倍数の石を残せる。

3 個を 1 組として減らす

相手に 3 の倍数を残したあと、

$$\text{相手を取る個数} + \text{自分を取る個数} = 3$$

となるように取ればよい。

これを繰り返すと、

$$\dots, 9, 6, 3, 0$$

のように、相手に渡す石の個数を 3 の倍数のまま減らせる。

最初の一手を決める

3 で割った余りを見る

最初の石の個数が 3 の倍数でない場合を考える。

たとえば 10 個なら、

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

である。

3 で割った余りは 1 なので、最初に 1 個取れば 9 個を相手に残せる。

14 個なら、

$$14 = 3 \cdot 4 + 2$$

である。

余りは 2 なので、最初に 2 個取れば 12 個を相手に残せる。

このように、3 で割った余りが 1 なら 1 個、余りが 2 なら 2 個取ればよい。

必勝の基本戦略

最初の石の個数が 3 の倍数でないなら、次のようにする。

1. 3 で割った余りの個数だけ石を取る。
2. 相手に 3 の倍数を残す。
3. その後、相手が 1 個取ったら 2 個取る。
4. 相手が 2 個取ったら 1 個取る。
5. 相手との 2 手で合計 3 個ずつ減らす。

この手順を守れば、最後の石を自分が取れる。

最初から 3 の倍数なら同じ戦略は始められない

最初の石が 12 個なら、すでに 3 の倍数である。

自分は 1 個または 2 個取らなければならないので、相手には 11 個または 10 個を渡すことになる。

どちらも相手が 3 の倍数を残せる状態である。

したがって、相手も最善の手を選ぶなら、12 個から始める先手には必勝の手がない。

具体例で戦略を追う

石が 11 個ある場合

石が 11 個あり、自分が先手であるとする。

11 を 3 で割ると余りは 2 なので、最初に 2 個取る。

相手には 9 個残る。

その後は、相手が取った個数との合計が 3 になるように取る。

たとえば相手が 1 個取れば、自分は 2 個取る。

石の個数は、

$$9 \rightarrow 8 \rightarrow 6$$

と変化する。

次に相手が 2 個取れば、自分は 1 個取る。

$$6 \rightarrow 4 \rightarrow 3$$

となる。

最後に相手が 1 個取れば、自分が残り 2 個を取る。

$$3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

となり、自分が最後の石を取って勝つ。

相手の手を予想する必要はない

この戦略では、相手が毎回 1 個取るか 2 個取るかを事前に予想する必要はない。

相手が 1 個なら 2 個、相手が 2 個なら 1 個と、その手に応じて選べばよい。

重要なのは、自分の手番のあとに 3 の倍数を相手へ残し続けることである。

ルールを変えると必敗状態も変わる

この講では 1 個または 2 個だけを取る

3 の倍数が必敗状態になるのは、

1 回に取れる石が 1 個または 2 個である

というルールによるものである。

取れる個数のルールが変われば、必勝・必敗の状態も変わる可能性がある。

この講では、1 回に 1 個または 2 個取るルールだけを扱う。

ゲーム問題の見方

遊びを数学として考えるときは、次の順に整理するとよい。

1. ルールを明確にする。
2. ゲームが終わった状態から逆向きに考える。
3. 小さい状態を順に必勝・必敗へ分類する。
4. 繰り返し現れる規則を見つける。
5. 見つけた規則を実際の戦略へ変える。

例題

例題 1

石が 8 個ある。2 人が交互に 1 個または 2 個の石を取り、最後の石を取った人が勝つ。
先手が必ず勝つためには、最初に何個取ればよいか。また、その後の基本戦略を説明せよ。

例題 1 の解答・解説

8 を 3 で割ると余りは 2 である。

したがって、先手は最初に 2 個取ればよい。

すると相手には 6 個残る。

6 は 3 の倍数である。

その後は、

- ・ 相手が 1 個取ったら 2 個取る。
- ・ 相手が 2 個取ったら 1 個取る。

とする。

相手と自分の 2 手で合計 3 個ずつ減らすことで、相手には 3 の倍数を残し続けられる。

したがって、先手は最後の石を取ることができる。

例題 2

石が 12 個ある。同じルールで先手と後手が遊ぶ。

先手から見た 12 個の状態が必勝状態か必敗状態か答え、理由を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

12 は 3 の倍数である。

先手が 1 個取ると、後手には 11 個残る。

このとき後手は 2 個取って 9 個を先手に残せる。

先手が 2 個取ると、後手には 10 個残る。

このとき後手は 1 個取って 9 個を先手に残せる。

どちらの場合も、後手は先手に 3 の倍数を残す戦略を始められる。

したがって、相手も最善の手を選ぶなら、12 個の状態は先手にとって必敗状態である。

例題 3

石が 17 個ある。同じルールで先手が必勝戦略を使う。

(1) 最初に何個取ればよいか。

(2) その後、後手が 2 個取ったとき、先手は何個取ればよいか。

(3) そのように取る理由を説明せよ。

例題 3 の解答・解説

(1)

17 を 3 で割ると余りは 2 である。

したがって、最初に 2 個取る。

すると相手には 15 個残る。

(2)

後手が 2 個取ったなら、先手は 1 個取る。

(3)

後手と先手が取る個数の合計を 3 にするためである。

これにより、15 個から、

$$15 \rightarrow 13 \rightarrow 12$$

となり、再び相手へ 3 の倍数を残せる。

この操作を繰り返すことで必勝戦略を続けられる。

演習問題

練習問題 1

石が 4 個ある。

先手が必ず勝つためには、最初に何個取ればよいか。

練習問題 2

石が 5 個ある。

先手が必ず勝つためには、最初に何個取ればよいか。また、その後に相手が 1 個取った場合、自分は何個取ればよいか。

練習問題 3

石が 9 個ある。
先手から見て必勝状態か必敗状態か答え、その理由を説明せよ。

練習問題 4

石が 13 個ある。
先手の最初の一手を求め、その一手のあとに相手へ何個の石を残すか答えよ。

練習問題 5

石が 20 個ある。
(1) 先手は最初に何個取ればよいか。
(2) その後、後手が 1 個取った場合、先手は何個取ればよいか。
(3) 後手が 2 個取った場合、先手は何個取ればよいか。

練習問題 6

石が 3 個、6 個、7 個、15 個、16 個ある状態について、それぞれ先手にとって必勝状態か必敗状態か答えよ。

練習問題 7

石が 14 個あるとき、先手が最初に 1 個取った。
この手では 3 の倍数を相手に残せているか。残せていない場合、最初に何個取ればよかったか答えよ。

練習問題 8

ある生徒は、「石が 10 個あるとき、できるだけ多く取った方が有利なので、最初に 2 個取ればよい」と考えた。
この考え方では必勝戦略にならない理由を説明し、正しい最初の一手を答えよ。

練習問題 9

石が 25 個ある。
先手が必勝戦略を使うとする。
最初の一手と、その後に守るべき「相手が取った個数と自分が取る個数」の関係を説明せよ。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

4 を 3 で割ると余りは 1 である。
したがって、最初に 1 個取る。
すると相手には 3 個残る。
3 個は必敗状態なので、先手は必勝戦略を始められる。

練習問題 2 の解答・解説

5 を 3 で割ると余りは 2 である。
したがって、先手は最初に 2 個取る。
相手には 3 個残る。
相手が 1 個取れば石は 2 個残るので、自分は 2 個すべてを取ればよい。
相手が取った 1 個と自分が取る 2 個の合計は 3 個である。

練習問題 3 の解答・解説

9 は 3 の倍数である。
先手が 1 個取れば相手に 8 個、2 個取れば相手に 7 個を渡すことになる。
8 個なら相手は 2 個取って 6 個を残せる。
7 個なら相手は 1 個取って 6 個を残せる。
どちらの場合も相手が 3 の倍数を残す戦略を始められる。
したがって、9 個は先手にとって必敗状態である。

練習問題 4 の解答・解説

13 を 3 で割ると余りは 1 である。
したがって、先手は最初に 1 個取る。
すると、

$$13 - 1 = 12$$

なので、相手に 12 個残る。
12 は 3 の倍数である。

練習問題 5 の解答・解説

(1)
20 を 3 で割ると余りは 2 である。
したがって、先手は最初に 2 個取る。
相手には 18 個残る。
(2)
後手が 1 個取った場合、先手は 2 個取る。
(3)
後手が 2 個取った場合、先手は 1 個取る。
どちらの場合も、後手と先手が取る個数の合計を 3 にすることで、先手の手番のあとに 3 の倍数を相手へ残せる。

練習問題 6 の解答・解説

3 の倍数は必敗状態であり、3 の倍数でない状態は必勝状態である。

したがって、

- 3 個：必敗
- 6 個：必敗
- 7 個：必勝
- 15 個：必敗
- 16 個：必勝

である。

7 個では 1 個取って 6 個を残せる。

16 個では 1 個取って 15 個を残せる。

練習問題 7 の解答・解説

14 個から 1 個取ると、

$$14 - 1 = 13$$

となる。

13 は 3 の倍数ではないので、3 の倍数を相手に残せていない。

14 を 3 で割った余りは 2 なので、最初に 2 個取るべきである。

そうすれば、

$$14 - 2 = 12$$

となり、相手に 3 の倍数を残せる。

練習問題 8 の解答・解説

10 個から 2 個取ると、相手には 8 個残る。

8 個は 3 の倍数ではない。

相手は 8 個から 2 個取って 6 個を残せるため、相手が 3 の倍数を残す戦略を始められる。

したがって、単にできるだけ多く取ればよいわけではない。

10 を 3 で割った余りは 1 なので、先手は最初に 1 個取るのが正しい。

すると相手には 9 個残る。

練習問題 9 の解答・解説

25 を 3 で割ると余りは 1 である。

したがって、先手は最初に 1 個取る。

すると相手には 24 個残る。

24 は 3 の倍数である。

その後は、

$$\text{相手が取った個数} + \text{自分が取る個数} = 3$$

となるように取る。

つまり、

- 相手が 1 個なら自分は 2 個
- 相手が 2 個なら自分は 1 個

とする。

これにより、相手へ 3 の倍数を残し続けられる。