第 183 講 三角・指数・対数関数の極限

学習目標

三角関数では、角が 0 に近づくときの $\sin\theta$ と θ の比を利用して極限を判断できるようになる。
指数関数では、底 a が 1 より大きいか、$0<a<1$ であるかによって、無限遠での変化の向きを判断できるようになる。
対数関数では、指数関数との逆関係を利用して、$x\to+\infty$ や $x\to0^+$ における発散の向きを説明できるようになる。
有限の値へ近づく収束と、$+\infty$ や $-\infty$ へ向かう発散を区別できるようになる。

極限を見るときの判断軸

関数の極限では、単に式を計算するだけではなく、「入力がどこへ近づくか」と「そのとき出力がどの方向へ変化するか」を分けて考えることが重要である。
三角関数の極限では、角が 0 に近づく場面で、角そのものと正弦の値の比に注目する。
指数関数と対数関数では、底の大小が変化の方向を決める。底が 1 より大きいときは増加し、逆数を底にすると増加と減少の向きが逆になる。
また、極限はその点での関数の値とは異なる。例えば $x=0$ で $\frac{\sin x}{x}$ は定義されないが、x が 0 に近づくときの値の変化は調べることができる。

三角関数の基本極限

角はすべて弧度法（ラジアン）で扱う。
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とし、単位円上の点を $B(\cos\theta,\sin\theta)$、原点を $O(0,0)$、$A(1,0)$ とする。また、直線 $x=1$ と半直線 OB の交点を $C(1,\tan\theta)$ とする。
三角形 OAB は扇形 OAB に含まれ、扇形 OAB は三角形 OAC に含まれる。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ではそれぞれの間に面積の正の差があるため、面積を厳密な不等号で比較できる。
半径 1 の円では、弧度法による中心角 θ の扇形の面積は $\frac{\theta}{2}$ である。したがって、面積比較より、次の式が成り立つ。

$$\frac{\sin\theta}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\tan\theta}{2}$$

ここで、$\sin\theta>0$、$\cos\theta>0$、$\theta>0$ であるから、両辺を整理すると、$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$ を得る。
$\theta\to0^+$ のとき、$\cos\theta\to1$ は既習の基本性質として用いる。したがって、はさみうちの原理より、$\lim_{\theta\to0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ である。
また、次の式が成り立つ。

$$\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}$$

この等式から、左側から近づく場合も同じ値になる。
よって、$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ である。
この結果は微分を用いて証明しているのではなく、単位円と面積比較から得られる。

©ミライコーチング

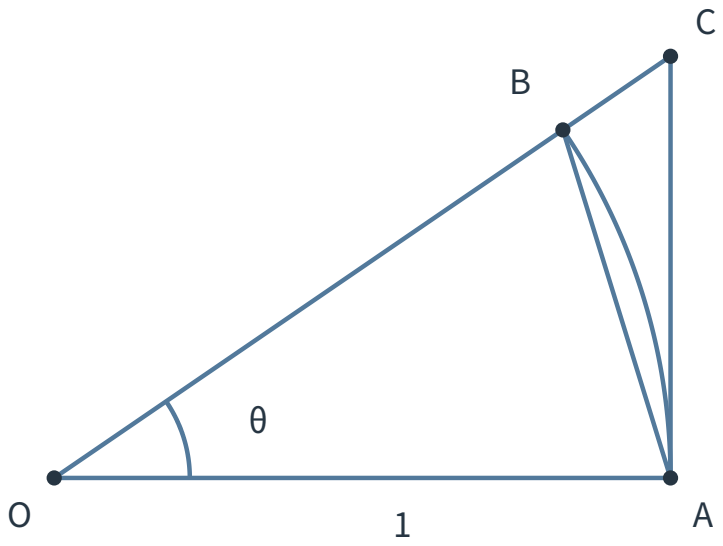

図 1　0<θ<π/2 の単位円の図（形の例として θ=0.6 ラジアン）。O=(0,0)、A=(1,0)、B=(cosθ,sinθ)、C=(1,tanθ)で、O・B・C は同一直線上にある。三角形 OAB は扇形 OAB に含まれ、扇形 OAB は三角形 OAC に含まれる。面積は順に sinθ/2、θ/2、tanθ/2 なので sinθ<θ<tanθ。小さい弧は角 θ の印、大きい弧は単位円の弧 AB である。

なお、$x = 0$ では $\frac{\sin x}{x}$ は定義されないが、極限は存在する。関数値と極限値は区別する必要がある。

三角関数の極限で見る点

$\frac{\sin x}{x}$ の極限では、$x = 0$ の関数値を求めているのではなく、x が 0 へ近づくときの比の変化を調べている。
また、この結果は微分法やロピタルの定理、テイラー展開を使わず、単位円と面積比較から導いている。

指数関数の極限

指数関数を $y = a^x$ とする。ただし、$a > 0$、$a \neq 1$ であり、定義域はすべての実数である。
$a > 1$ のとき、指数関数は増加するだけでなく、任意に大きな値へ向かう。既習の無限等比数列より、$a^n \to +\infty$ であるから、任意の $K > 0$ に対して、ある整数 N を選べば $a^N > K$ となる。
さらに、実数 $x > N$ では単調性より $a^x > a^N > K$ となるため、実数入力でも $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ である。

また、$x \to -\infty$ のとき $t = -x$ とおくと、$t \to +\infty$ であり、$a^x = a^{-t} = \frac{1}{a^t}$ となる。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$a^t > \frac{1}{\varepsilon}$ となる十分大きな t を選べば、$0 < a^x = \frac{1}{a^t} < \varepsilon$ となる。したがって、$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ である。
一方、$0 < a < 1$ のときは $a = \frac{1}{b}$（$b > 1$）とおけるため、$a^x = b^{-x}$ である。$x \to +\infty$ では $-x \to -\infty$、$x \to -\infty$ では $-x \to +\infty$ となるため、$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ および $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ となる。

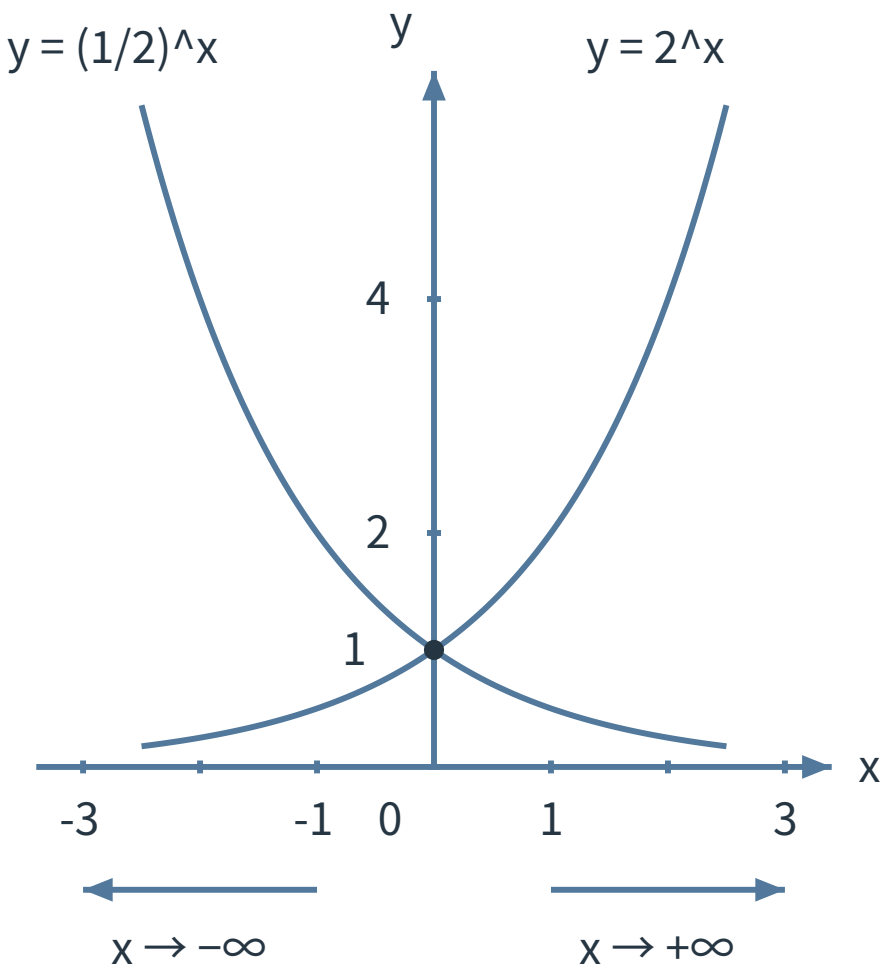

図 2　実線は y=2^x と y=(1/2)^x のグラフの一部で、どちらも(0,1)を通る。2^x は増加し、x→−∞で 0、x→+∞で+∞へ向かう。(1/2)^x は減少し、x→−∞で+∞、x→+∞で 0 へ向かう。0 へ近づくときも関数値は正である。横軸の下の矢印は入力 x の向き。有限の表示端は定義域の端や無限遠の点ではなく、極限は本文の一般的な性質と合わせて読む。

指数関数の極限では、底が 1 より大きいか、0 と 1 の間かを確認し、指数の向きと値の変化方向を対応させることが重要である。

対数関数の極限

対数関数を $y = \log_a x$ とする。ただし、$a > 0$、$a \neq 1$、真数は $x > 0$ である。

対数の定義より、$y = \log_a x$ と $a^y = x$ は同値である。つまり、対数関数は指数関数の逆関係を表している。
$a > 1$ のとき、任意の $K > 0$ に対して、$x > a^K$ ならば、$\log_a x > K$ となる。また、$0 < x < a^{-K}$ ならば、$\log_a x < -K$ となる。
したがって、$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ および $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ である。
一方、$0 < a < 1$ のとき、$b = \frac{1}{a} > 1$ とおくと、$\log_a x = -\log_b x$ となる。底が 1 より大きい場合の結果から、$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ および $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ となる。

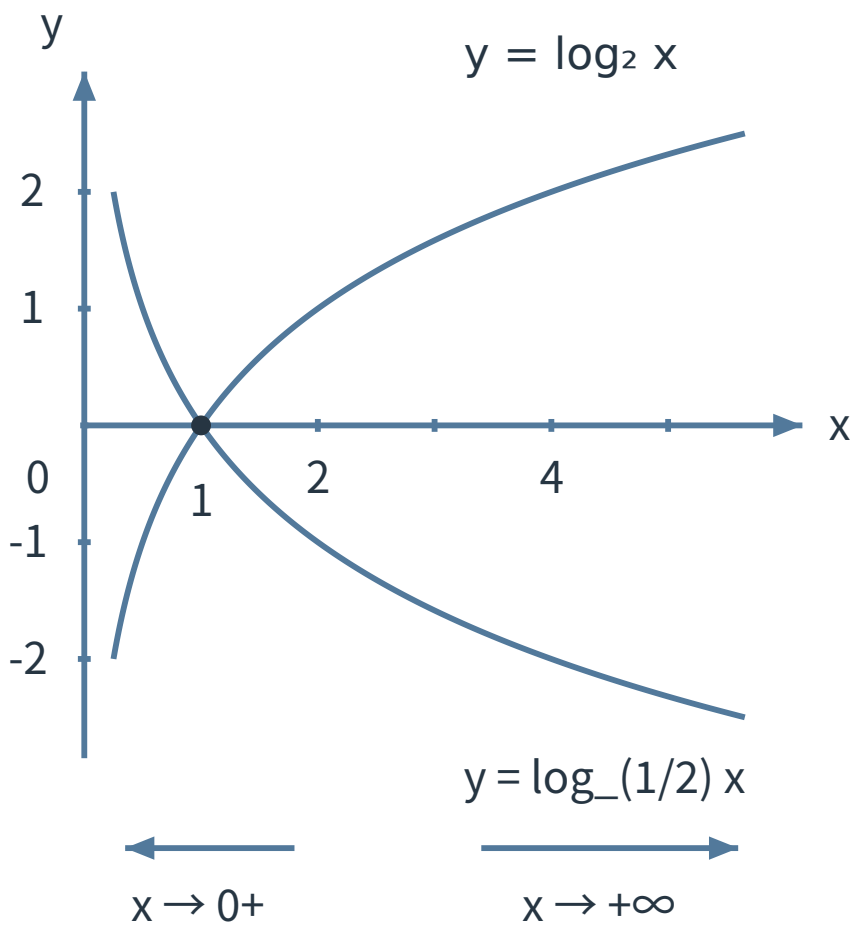

図 3　実線は y=log₂x と底 1/2 の対数関数のグラフの一部で、定義域は x>0、どちらも(1,0)を通る。log₂x は増加し、x→0+で−∞、x→+∞で+∞へ向かう。底 1/2 の対数関数は減少し、x→0+で+∞、x→+∞で−∞へ向かう。下の矢印は正の入力 x を 0 へ近づける向きと大きくする向き。有限の表示端は定義域の端や無限遠の点ではない。曲線に x=0 の点は含まれない。

対数関数では $x = 0$ を代入して考えない。実数の対数は真数が正である必要があり、$x < 0$ は実数の定義域外である。

底の条件

指数関数では $a=1$ の場合、$1^x=1$ という定数関数になる。しかし、対数関数では指数関数の逆関係を作れないため、底として 1 は使えない。
また、有限範囲で描かれたグラフの端は、無限遠や定義域の端そのものを表しているわけではない。図は変化の方向を理解するための補助として利用する。

例題 1

次の極限を求めよ。
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

例題 1 の解答・解説

x そのものではなく、分子の角 $3x$ に注目する。
$t=3x$ とおくと、$x\to 0$ のとき $t\to 0$ である。
0 に十分近い $x\neq 0$ では、次の式が成り立つ。

$$\frac{\sin 3x}{x}=3\frac{\sin t}{t}$$

ここで、$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ を利用すると、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$ となる。
なお、$x=0$ では元の式は定義されないが、極限は存在する。関数値と極限値を混同しないことが重要である。

例題 2

次の極限を求めよ。
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

例題 2 の解答・解説

底が 0 と 1 の間であるため、逆数を利用して考える。
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ である。
$x\to+\infty$ のとき、$-x\to-\infty$ となる。底 2 は 1 より大きいため、$\lim_{x\to-\infty}2^x=0$ である。
したがって、$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ となる。
値は常に正であり、0 に近づくが 0 にはならない。

例題 3

次の極限を調べよ。
$\lim_{x\to 0^+}\log_2 x$

例題 3 の解答・解説

底 2 は 1 より大きいため、対数関数は増加する。
発散の意味を確かめるため、任意の正の数 K を考える。
もし、$0 < x < 2^{-K}$ ならば、指数関数との逆関係から、$\log_2 x < -K$ となる。
つまり、x を 0 に近づけると、$\log_2 x$ はどんな負の値よりも小さくなる。
したがって、$\lim_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$ となる。
ここでは $x = 0$ を代入しているのではなく、正の範囲から 0 へ近づく変化を調べている。

演習問題

演習問題 1

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

演習問題 2

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$ ただし、$0 < |\, x \,| < \frac{\pi}{5}$ の範囲で考えること。

演習問題 3

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ただし、$1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ を利用してよい。

演習問題 4

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

演習問題 5

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to -\infty} 3^x$

演習問題 6

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

演習問題 7

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

©ミライコーチング

演習問題 8

次の極限を求めよ。
$\lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{3}} x$

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

分子の角 $5x$ と分母の x をそろえる。

$$\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{5x}$$

ここで、$5x \to 0$ であるから、$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ を利用できる。
したがって、求める極限は $\frac{5}{2}$ である。
この問題では、$\sin \frac{u}{u}$ の基本極限を使える形へ変形することが判断のポイントである。

演習問題 2 の解答・解説

分子と分母をそれぞれ基本極限の形へ変形する。
$0 < |\, x \,| < \frac{\pi}{5}$ では $5x \neq 0$ かつ $\sin 5x \neq 0$ であるため、割り算が可能である。

$$\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \frac{2x}{5x} \cdot \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}$$

ここで、$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$ および $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ である。
したがって、次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1}$$

よって、求める極限は $\frac{2}{5}$ である。
$\sin 2x$ と $\sin 5x$ をそのまま割って基本極限を使うのではなく、それぞれを $\sin \frac{x}{x}$ の形へ直すことが重要である。

演習問題 3 の解答・解説

直接では $\frac{0}{0}$ 型になるため、与えられた式変形を利用する。
$1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ より、次の式が成り立つ。

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

0 の近くでは $1 + \cos x \neq 0$ である。また、$x \neq 0$ として、次の式が成り立つ。

$$\frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{1 + \cos x}$$

ここで、$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ および $\cos x \to 1$ を利用すると、次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{1 + \cos x} = \frac{1^2}{1 + 1}$$

したがって、求める極限は $\frac{1}{2}$ である。
この問題では、$\frac{\sin x}{x}$ の基本極限を直接使える形へ変換することがポイントである。

©ミライコーチング

演習問題 4 の解答・解説

正接を正弦と余弦で表す。
$0 < |\,x\,| < \frac{\pi}{2}$ では $\cos x \neq 0$ であるため、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ が成り立つ。
したがって、次の式が成り立つ。

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

ここで、 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ および $\cos x \to 1$ より、次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot \frac{1}{1}$$

よって、求める極限は 1 である。

演習問題 5 の解答・解説

x は限りなく小さくなるため、置換して考える。
$t = -x$ とおくと、$x \to -\infty$ のとき $t \to +\infty$ である。
また、 $3^x = 3^{-t} = \frac{1}{3^t}$ となる。
t が大きくなると 3^t は限りなく大きくなるため、 $\frac{1}{3^t} \to 0$ である。
したがって、求める極限は 0 である。
指数関数では、入力の向きと出力の変化の向きを分けて考えることが重要である。

演習問題 6 の解答・解説

底を逆数の形から直す。
$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ ここで、$x \to -\infty$ のとき $-x \to +\infty$ となる。
したがって、 $3^{-x} \to +\infty$ である。
したがって、関数値は $+\infty$ へ発散する。
指数関数では、底が 1 より大きい場合、指数が正の方向へ大きくなると値も大きくなる。この問題では、$-x$ への変換によって入力方向が変化していることに注意する。

演習問題 7 の解答・解説

底が 0 と 1 の間であるため、底を 2 の形へ直す。
$\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ である。
$x \to +\infty$ のとき、$\log_2 x$ は $+\infty$ へ発散するため、 $-\log_2 x \to -\infty$ となる。
また、任意の $K > 0$ に対して、$x > 2^K$ ならば、 $\log_2 x > K$ であるから、 $\log_{\frac{1}{2}} x < -K$ となる。
したがって、求める極限は $-\infty$ である。
真数は常に $x > 0$ でなければならず、無限大へ向かう変化として考える。

演習問題 8 の解答・解説

底を 3 の対数へ直す。
$\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$ ここで、$x \to 0^+$ は正の範囲から 0 に近づくことを表す。
任意の $K > 0$ に対して、 $0 < x < 3^{-K}$ ならば、 $\log_3 x < -K$ となる。
したがって、 $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x > K$ である。
よって、x を 0 に近づけると値はいくらでも大きくなるため、求める極限は $+\infty$ である。
ここでは $x = 0$ を代入しているのではなく、定義域 $x > 0$ の範囲から端点へ近づけている。

©ミライコーチング