

第 144 講 自然数の和と平方の和

学習目標

この講では、正整数 n について次のことができるようになることを目標とする。

- 1 から n までの自然数の和を、等差数列の和や逆順に並べた組合せから説明できる。
- 1 から n までの自然数の平方を足す量を理解し、平方和の公式を導出できる。
- 下端が 1 でない平方和を、必要な範囲の差として表現できる。
- 平方の和と和の平方の違いを区別できる。

自然数の和を見る視点

正整数 n について、1 から n までの自然数の和を

$$S = \sum_{k=1}^n k$$

とする。

この和は、初項が 1、末項が n 、項数が n の等差数列の和である。

同じ和を逆順に見る。前向きの列では k 番目の項が k であり、逆順の列では k 番目の項が $n+1-k$ である。

対応する項どうしを足すと、 $k + (n+1-k) = n+1$ となる。

k は $1 \leq k \leq n$ を満たすため、この組合せは n 個存在する。したがって、 $2S = n(n+1)$ となる。よって、

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

である。

$n=1$ のときは $2S = 1(1+1) = 2$ となり、 $S=1$ を確認できる。 $n=2$ のときは $2S = 2(2+1) = 6$ となり、 $S=3$ である。

平方和

正整数 n について、 $1 \leq k \leq n$ の各整数 k を二乗して足した量を平方和という。

平方和は次の式で表される。

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

具体的な値を見ると、 $n=1$ のときは 1、 $n=2$ のときは $1^2 + 2^2 = 5$ 、 $n=3$ のときは $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ である。

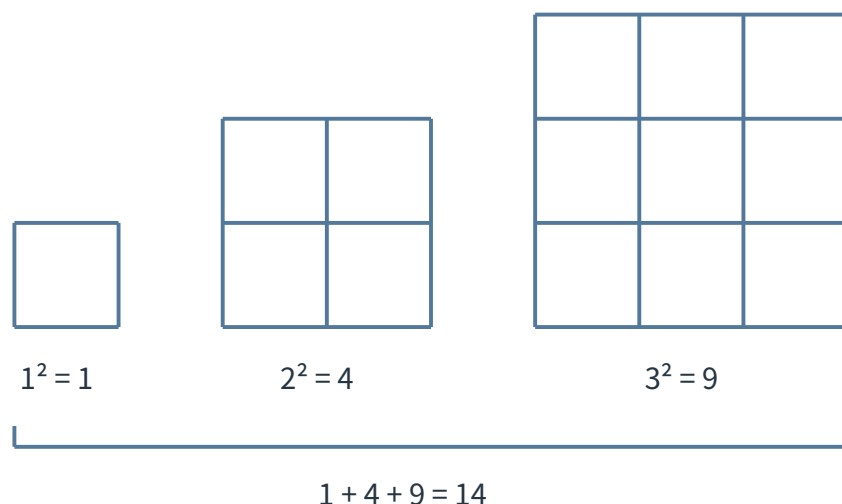


図1 同じ大きさの単位マスで 1×1 、 2×2 、 3×3 の正方形を別々に作る。マスは順に 1 個、4 個、9 個で、合計 14 個である。1、2、3 をそれぞれ 2 乗してから足す具体例である。

$n = 3$ の図では、辺の長さが k の正方形を考えている。辺の長さが k の正方形は、同じ大きさの単位マスを k^2 個持つため、 1^2 、 2^2 、 3^2 はそれぞれの正方形の単位マスの個数を表す。ただし、この具体例だけから一般の公式を決めることはできない。平方和の公式は、一般の正整数 n について代数的に導出する。

平方和の公式の導出

平方和の公式は、次の恒等式を利用して導く。

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

この式を $k = 1$ から n まで足す。

左辺では、隣り合う立方数が相殺する。 $n \geq 2$ のとき、 2^3 から n^3 までの項は 1 回正、1 回負で現れるため、最後には $(n+1)^3$ と -1^3 が残る。

$n = 1$ のときは相殺する中間項はないが、 $2^3 - 1^3 = 7$ となり、同じ端の式で成立する。

したがって、すべての正整数 n について、

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

となる。最後の n は、定数項 1 が n 個あるためである。

ここで、

$$Q = \sum_{k=1}^n k^2$$

とおく。また、

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

を使う。
すると、

$$3Q = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

となる。
右辺を整理すると、

$$\begin{aligned} 3Q &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

である。
したがって、

$$Q = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

となる。
よって、

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

である。

Σの式で区別するもの

次の2つの式は、見た目が似ているが意味が異なる。

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

は、各項を二乗してから足す式である。

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

は、先にすべての項を足し、その結果を二乗する式である。

一般には、この2つは一致しない。

$n=3$ のとき、

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

である。
一方、

$$\left(\sum_{k=1}^3 k\right)^2 = (1 + 2 + 3)^2 = 36$$

となる。

ただし、 $n = 1$ のときは、

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$$

かつ、

$$\left(\sum_{k=1}^1 k\right)^2 = 1$$

であり、一致する場合もある。

平方和を使うときの注意

平方和の公式

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

は、正整数 n に対して成立する。

また、 $n = 1$ のとき、

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

となり、左辺の 1^2 と一致するため、最小の場合でも成立する。

下端が 1 でない平方和では、必要な範囲までの平方和を求めてから前の部分を引く。

例題 1

1 から 50 までの自然数の和を求めよ。

例題 1 の解答・解説

1 から 50 までの自然数の和なので、自然数の和の公式を使う。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50} k &= \frac{50(50+1)}{2} \\ &= 1275\end{aligned}$$

したがって、求める和は 1275 である。

この問題では、項数が 50 個であることと、最後の項が 50 であることを読み取ることがポイントである。

例題 2

$1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2$ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

平方和の公式を使う。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} k^2 &= \frac{20(20+1)(2 \cdot 20+1)}{6} \\ &= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} \\ &= 2870\end{aligned}$$

したがって、求める平方和は 2870 である。

平方和では、20 までの各数を二乗して足すため、自然数の和の公式ではなく平方和の公式を使う。

例題 3

$5^2 + 6^2 + \cdots + 20^2$ を求めよ。

例題 3 の解答・解説

平方和の公式は 1 から始まる和であるため、必要な部分だけを残す。

$5^2 + 6^2 + \cdots + 20^2$ は、 $(1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + 4^2)$

と考える。

それぞれを平方和の公式で求める。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} k^2 &= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} \\ &= 2870 \\ \sum_{k=1}^4 k^2 &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} \\ &= 30\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}5^2 + 6^2 + \cdots + 20^2 &= 2870 - 30 \\ &= 2840\end{aligned}$$

となる。

下端が 1 でない平方和では、全体の平方和から不要な前半部分を引くことで求められる。

演習問題**練習問題 1**

1 から 80 までの自然数の和を求めよ。

練習問題 2

正整数 n について、次の平方和を考える。

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

平方和の公式を書き、 $n = 10$ のときの値を求めよ。

練習問題 3

次の和を求めよ。

$$7^2 + 8^2 + \cdots + 15^2$$

練習問題 4

正整数 n について、次の式を簡単にせよ。

$$\sum_{k=1}^n 3k^2$$

練習問題 5

正整数 n について、次の式を簡単にせよ。

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + 2k)$$

練習問題 6

次の式が誤っている理由を説明し、正しい値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^4 k^2 = \left(\sum_{k=1}^4 k \right)^2$$

練習問題 7

平方和の公式が $n = 1$ でも成立することを確認せよ。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

練習問題 8

整数 m, n が $2 \leq m \leq n$ を満たすとする。

$$\sum_{k=m}^n k^2$$

を平方和の公式を使って表せ。

練習問題 1 の解答・解説

1 から 80 までの自然数の和なので、自然数の和の公式を使う。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{80} k &= \frac{80(80+1)}{2} \\ &= 3240\end{aligned}$$

したがって、求める和は 3240 である。

練習問題 2 の解答・解説

平方和の公式を使う。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 10$ のとき、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k^2 &= \frac{10(10+1)(2 \cdot 10 + 1)}{6} \\ &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \\ &= 385\end{aligned}$$

したがって、値は 385 である。

練習問題 3 の解答・解説

7^2 から 15^2 までの平方和は、1 から 15 までの平方和から 1 から 6 までの平方和を引く。

$$\sum_{k=7}^{15} k^2 = \sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^6 k^2$$

それぞれ計算する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} k^2 &= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} \\ &= 1240\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^6 k^2 &= \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} \\ &= 91\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=7}^{15} k^2 &= 1240 - 91 \\ &= 1149\end{aligned}$$

となる。

下端が 1 でない平方和では、公式が使える形に直すため、前の部分を引く。

練習問題 4 の解答・解説

定数倍は和の外へ出すことができる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 3k^2 &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

したがって、求める式は

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

である。

練習問題 5 の解答・解説

和を分けて考える。

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k$$

平方和と自然数の和の公式を使う。

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) \end{aligned}$$

共通因数をまとめる。

$$\begin{aligned} &= n(n+1) \left(\frac{2n+1}{6} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \end{aligned}$$

したがって、求める式は

$$\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

この式は誤った式である。

左辺は「各数を二乗してから足す」式である。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ &= 30 \end{aligned}$$

一方、右辺は「足してから全体を二乗する」式である。

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^4 k \right)^2 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{k=1}^4 k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^4 k \right)^2$$

である。

違いは、二乗するタイミングにある。

練習問題 7 の解答・解説

$n = 1$ を公式に代入する。

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \\ &= 1\end{aligned}$$

一方、左辺は、

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$$

である。

両辺が一致するため、 $n = 1$ でも平方和の公式は成立する。

練習問題 8 の解答・解説

m から n までの平方和は、1 から n までの平方和から、1 から $m-1$ までの平方和を引くことで求める。

1 から $m-1$ までを引くため、 m^2 は残り、引く範囲には含まれない。

$$\sum_{k=m}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2$$

平方和の公式を使う。

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\quad - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\end{aligned}$$

これが求める式である。

$n = m$ の場合でも、

$$\sum_{k=m}^m k^2 = m^2$$

となる。差の式でも、

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} = m^2$$

となり、一致する。