

第 79 講 二項定理

学習目標

- $(a+b)^n$ の展開係数が組合せの数と対応する理由を説明できる。
- 二項定理を使って $(a+b)^n$ 型の式を展開できる。
- 各項の文字の指数と符号を正しく判断できる。
- 二項定理を使って、展開したときの特定の項やその係数を求められる。

展開係数はどこから生まれるか

ここでは n を正の整数とする。 $(a+b)^n$ は、 $(a+b)$ を n 個掛けた式である。

例えば $(a+b)^4$ は

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

である。

この積を展開するとき、各括弧から a または b のどちらか一方を選んで掛け合わせる。

a^3b という項を作るには、4 個の括弧のうち 1 個から b を選び、残りの 3 個から a を選べばよい。 b を選ぶ括弧は 4 通りあるため、 a^3b の係数は 4 になる。

同様に、 a^2b^2 を作るには、4 個の括弧のうち 2 個から b を選ぶ。その選び方は ${}_4C_2 = 6$ 通りであるから、 a^2b^2 の係数は 6 になる。

したがって、

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

となる。

展開係数は偶然並んでいるのではなく、「どの括弧から b を選ぶか」という組合せの数になっているのである。

二項定理

$(a+b)^n$ の展開で、 $0 \leq r \leq n$ を満たす整数 r をとり、 b を r 個の括弧から選ぶとする。

すると、残りの $n-r$ 個の括弧からは a を選ぶため、できる文字の部分は $a^{n-r}b^r$ である。

b を選ぶ r 個の括弧の選び方は ${}_nC_r$ 通りである。したがって、 $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_nC_r$ となる。

これを並べると、二項定理は

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

となる。

左から右へ進むにつれて、 a の指数は $n, n-1, n-2, \dots, 0$ と 1 ずつ減り、 b の指数は $0, 1, 2, \dots, n$ と 1 ずつ増える。

どの項でも、 a と b の指数の和は常に n である。

例題

例題 1

二項定理を使って $(x+2)^5$ を展開せよ。

例題 1 の解答・解説

$n = 5$ であるから、組合せの数は

$$1, 5, 10, 10, 5, 1$$

となる。

x の指数を 5 から 0 まで 1 ずつ減らし、2 の指数を 0 から 5 まで 1 ずつ増やす。各項の係数は次のようになる。

$$5 \cdot 2 = 10, \quad 10 \cdot 2^2 = 40$$

$$10 \cdot 2^3 = 80, \quad 5 \cdot 2^4 = 80, \quad 2^5 = 32$$

したがって、

$$(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

となる。

各項で、 x と 2 に付く指数の和が 5 になっていることも確認できる。

例題 2

二項定理を使って $(2x - 1)^4$ を展開せよ。

例題 2 の解答・解説

$(2x - 1)^4$ は、二項定理の a に $2x$ 、 b に -1 を対応させればよい。

$n = 4$ の二項係数は 1, 4, 6, 4, 1 である。各項を別々に計算すると、

$$(2x)^4 = 16x^4, \quad 4(2x)^3(-1) = -32x^3$$

$$6(2x)^2(-1)^2 = 24x^2$$

$$4(2x)(-1)^3 = -8x, \quad (-1)^4 = 1$$

したがって、

$$(2x - 1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$$

となる。

-1 の指数が奇数の項では負、偶数の項では正になるため、符号は正負が交互に現れる。

例題 3

$(x + 3)^6$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$(x+3)^6$ の一般の項を、3 を r 個選ぶ場合として考えると、

$${}_6C_r x^{6-r} 3^r$$

となる。

x^3 の項を求めたいので、

$$6 - r = 3$$

より、 $r = 3$ である。

したがって、 x^3 の項は

$${}_6C_3 x^3 \cdot 3^3$$

である。

${}_6C_3 = 20$ 、 $3^3 = 27$ であるから、

$$20 \cdot 27 = 540$$

となる。

よって、 x^3 の係数は 540 である。

演習問題

演習問題 1

二項定理を使って $(x+1)^5$ を展開せよ。

演習問題 2

二項定理を使って $(a-2b)^4$ を展開せよ。

演習問題 3

$(x+3)^5$ を展開したときの x^2 の係数を求めよ。

演習問題 4

$(2x-1)^6$ を展開したときの x^4 の係数を求めよ。

演習問題 5

$(a+b)^5$ を展開したときの a^3b^2 の係数を求めよ。

演習問題 6

$(1-2x)^5$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ。

演習問題 7

$(2x + y)^5$ を展開したときの x^3y^2 の係数を求めよ。

演習問題の解答・解説**演習問題 1 の解答・解説**

$n = 5$ の二項係数は $1, 5, 10, 10, 5, 1$ である。

したがって、

$$(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

である。

x の指数が 5 から 0 まで 1 ずつ減っていることを確認できる。

演習問題 2 の解答・解説

二項定理の a に a 、 b に $-2b$ を対応させる。

各項を別々に計算すると、

$$4a^3(-2b) = -8a^3b, \quad 6a^2(-2b)^2 = 24a^2b^2$$

$$4a(-2b)^3 = -32ab^3, \quad (-2b)^4 = 16b^4$$

したがって、

$$(a - 2b)^4 = a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$$

となる。

$-2b$ の指数が奇数の項では負、偶数の項では正になるため、符号は正負が交互になる。

演習問題 3 の解答・解説

$(x + 3)^5$ の一般の項は

$${}_5C_r x^{5-r} 3^r$$

である。

x^2 の項では $5 - r = 2$ であるから、 $r = 3$ である。

したがって、その項の係数は

$${}_5C_3 \cdot 3^3 = 10 \cdot 27 = 270$$

となる。

よって、 x^2 の係数は 270 である。

演習問題 4 の解答・解説

$(2x - 1)^6$ の一般の項は

$${}_6C_r(2x)^{6-r}(-1)^r$$

である。

x^4 の項では $6 - r = 4$ であるから、 $r = 2$ である。

したがって、係数は

$${}_6C_2 \cdot 2^4 \cdot (-1)^2 = 15 \cdot 16 = 240$$

となる。

よって、 x^4 の係数は 240 である。

演習問題 5 の解答・解説

$(a + b)^5$ の一般の項は

$${}_5C_r a^{5-r} b^r$$

である。

$a^3 b^2$ では b の指数が 2 であるから、 $r = 2$ である。

このとき a の指数も $5 - 2 = 3$ となり、求める項と一致する。

したがって、係数は

$${}_5C_2 = 10$$

である。

演習問題 6 の解答・解説

$(1 - 2x)^5$ の一般の項は

$${}_5C_r (-2x)^r$$

である。

x^3 の項では $r = 3$ であるから、係数は

$${}_5C_3 (-2)^3 = 10 \cdot (-8) = -80$$

となる。

よって、 x^3 の係数は -80 である。奇数乗であるため、符号が負になる点に注意が必要である。

演習問題 7 の解答・解説

$(2x + y)^5$ の一般の項は

$${}_5C_r(2x)^{5-r}y^r$$

である。

x^3y^2 を作るには y の指数が 2 であるから、 $r = 2$ とすればよい。このとき x の指数は $5 - 2 = 3$ となる。

したがって、その項は

$${}_5C_2(2x)^3y^2$$

である。

係数は

$${}_5C_2 \cdot 2^3 = 10 \cdot 8 = 80$$

となる。

よって、 x^3y^2 の係数は 80 である。