

第 123 講 対数方程式

学習目標

- ・ 対数方程式で、最初に真数条件を確認してから変形する理由を説明できる。
- ・ $\log_a A = \log_a B$ や $\log_a A = c$ を指数の形へ直し、解を求められる。
- ・ 変形で得た候補が元の対数方程式を満たすかを検算できる。
- ・ 置換 $t = \log_a x$ を用いるとき、 t の範囲を誤って制限しない判断ができる。

対数方程式を解く基本の考え方

対数方程式では、式変形だけを見るのではなく、最初に「その式が存在する条件」を確認することが重要である。

対数 $\log_a A$ が定義されるためには、底について $a > 0$ 、 $a \neq 1$ が必要であり、さらに真数について $A > 0$ が必要である。

したがって、対数方程式を解く流れは次のようになる。

1. 各対数の真数条件を確認する。
2. 対数の性質や指数の関係を用いて候補を求める。
3. 求めた候補を必ず元の方程式へ戻して確認する。

変形後の式だけで判断すると、途中で追加された解や、もともと定義できない値を解として残す危険がある。

対数方程式で使う基本関係

底 a が $a > 0$ 、 $a \neq 1$ を満たし、 c を実数とする。

真数が正であるとき、対数と指数の関係から、 $\log_a A = c \Leftrightarrow A = a^c$ が成り立つ。ただし、 $A > 0$ である。

また、 $A > 0$ 、 $B > 0$ のもとでは、 $\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow A = B$ である。

これは対数関数 $y = \log_a x$ が単調関数であるだけでなく、厳密単調であり、異なる入力に同じ出力を対応させない 1 対 1 の関数であるためである。したがって、対数関数の値が等しいことと、真数が等しいことは同値になる。

この性質は $0 < a < 1$ の場合でも利用できる。底が 1 より小さいときは対数関数が減少関数になるが、厳密単調性と 1 対 1 の性質は保たれるため、等式の比較にはそのまま使える。

対数方程式で確認する条件

対数の積の性質 $\log_a A + \log_a B = \log_a (AB)$ を使う場合も、もとの式で $A > 0$ 、 $B > 0$ が必要である。

積 AB だけが正であっても、 A と B がともに対数の真数として使えるとは限らない。

また、 $t = \log_a x$ と置く場合、 $x > 0$ は必要であるが、 t はすべての実数をとる。したがって、 $t < 0$ を勝手に除外してはいけない。

よくある誤り

- ・ 真数条件を書かずに式変形だけを進める。
- ・ $\log_a A + \log_a B$ をまとめた後、個々の真数条件を確認しない。
- ・ $t = \log_a x$ と置いたとき、 $x > 0$ だから $t > 0$ だと誤解する。
- ・ 底が 1 より小さい場合、対数の等式比較まで使えないと思い込む。

例題 1

方程式 $\log_2(x-1) = 3$ を解きなさい。

例題 1 の解答・解説

対数が定義される条件から確認する。

真数が正である必要があるため、 $x-1 > 0$ より、 $x > 1$ である。

次に、対数を指数の形へ直す。

$$\log_2(x-1) = 3$$

$$x-1 = 2^3$$

$$x-1 = 8$$

$$x = 9$$

得られた値 $x = 9$ は $x > 1$ を満たす。

ここで、得られた解を元の式へ戻して確認する。 $x = 9$ のとき、真数は $9-1 = 8 > 0$ であり、 $\log_2 8 = 3$ となるため、元の方程式を満たす。

したがって、解は $x = 9$ である。

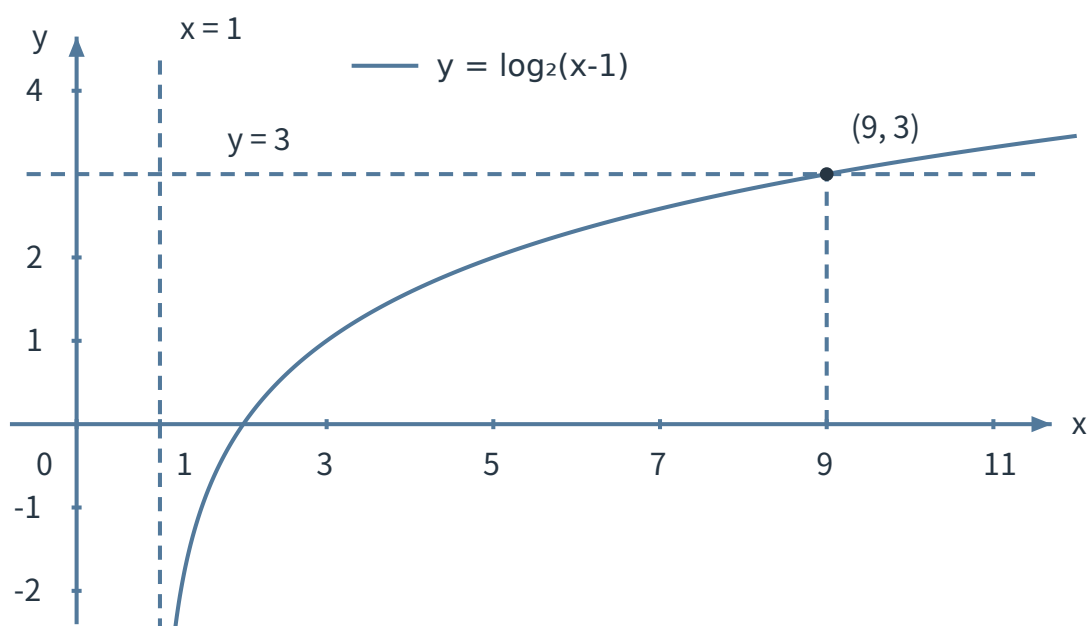


図1 実線 $y = \log_2(x-1)$ と破線 $y = 3$ の交点は $(9, 3)$ 。方程式の解は $x = 9$ 。定義域は $x > 1$ で、破線 $x = 1$ は漸近線。曲線は漸近線と交わらず、表示窓の端には点を付けない。

例題 2

方程式 $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$ を解きなさい。

例題 2 の解答・解説

まず、それぞれの対数が定義される条件を確認する。

$x-1 > 0$, $x-3 > 0$ より、 $x > 3$ である。

真数条件を満たす範囲で対数の性質を使う。

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = \log_2((x-1)(x-3))$$

したがって、 $\log_2((x-1)(x-3)) = 3$ となる。

指数の形へ直すと、 $(x-1)(x-3) = 2^3$ であるから、次のように計算する。

$$x^2 - 4x + 3 = 8$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x-5)(x+1) = 0$$

よって候補は、 $x = 5, -1$ である。

しかし、最初に求めた条件は $x > 3$ である。したがって、 $x = 5$ のみが残る。

実際に $x = -1$ を元の式へ戻すと、 $\log_2(-2)$ や $\log_2(-4)$ が現れ、真数条件を満たさないため元の方程式では意味を持たない。

ここで、得られた解を元の式へ戻して確認する。 $x = 5$ のとき、真数は $5-1=4$ 、 $5-3=2$ であり、どちらも正である。

したがって、 $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$ となり、元の方程式を満たす。

したがって、解は $x = 5$ である。

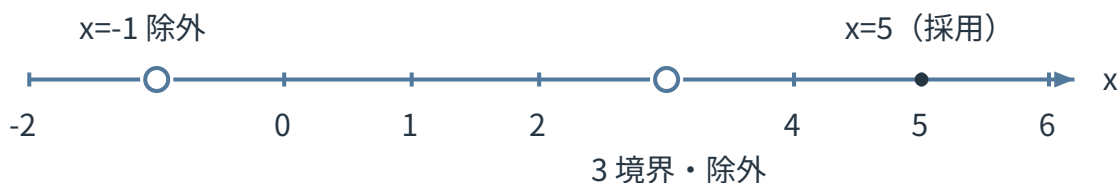


図 2 x の数直線。真数条件は $x > 3$ (3 より右側全体)。白丸の $x = -1$ は二次方程式の候補だが条件を満たさず除外。3 の白丸は定義域の境界で、方程式の候補ではない。黒丸の $x = 5$ を採用する。

例題 3

方程式 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 = 0$ を解きなさい。

例題 3 の解答・解説

真数条件を確認すると、 $x > 0$ である。

ここで、 $t = \log_2 x$ と置く。このとき、 $x > 0$ の範囲では t は全ての実数をとる。したがって、 $t > 0$ や $t \geq 0$ などの制限を勝手に加えてはいけな。特に負の t も有効な候補であり、除外してはいけな

い。

置換すると、 $t^2 + t - 2 = 0$ となる。

因数分解すると、 $(t+2)(t-1) = 0$ より、 $t = -2$, $t = 1$ である。

それぞれを x に戻す。

$t = -2$ のとき、 $\log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$t = 1$ のとき、 $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$

どちらも $x > 0$ を満たす。

ここで、得られた解を元の式へ戻して確認する。

$x = \frac{1}{4}$ のとき、 $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ であるから、 $(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$ となる。

$x = 2$ のとき、 $\log_2 2 = 1$ であるから、 $1^2 + 1 - 2 = 0$ となる。

したがって、どちらの値も元の方方程式を満たす。

したがって、解は $x = \frac{1}{4}, 2$ である。

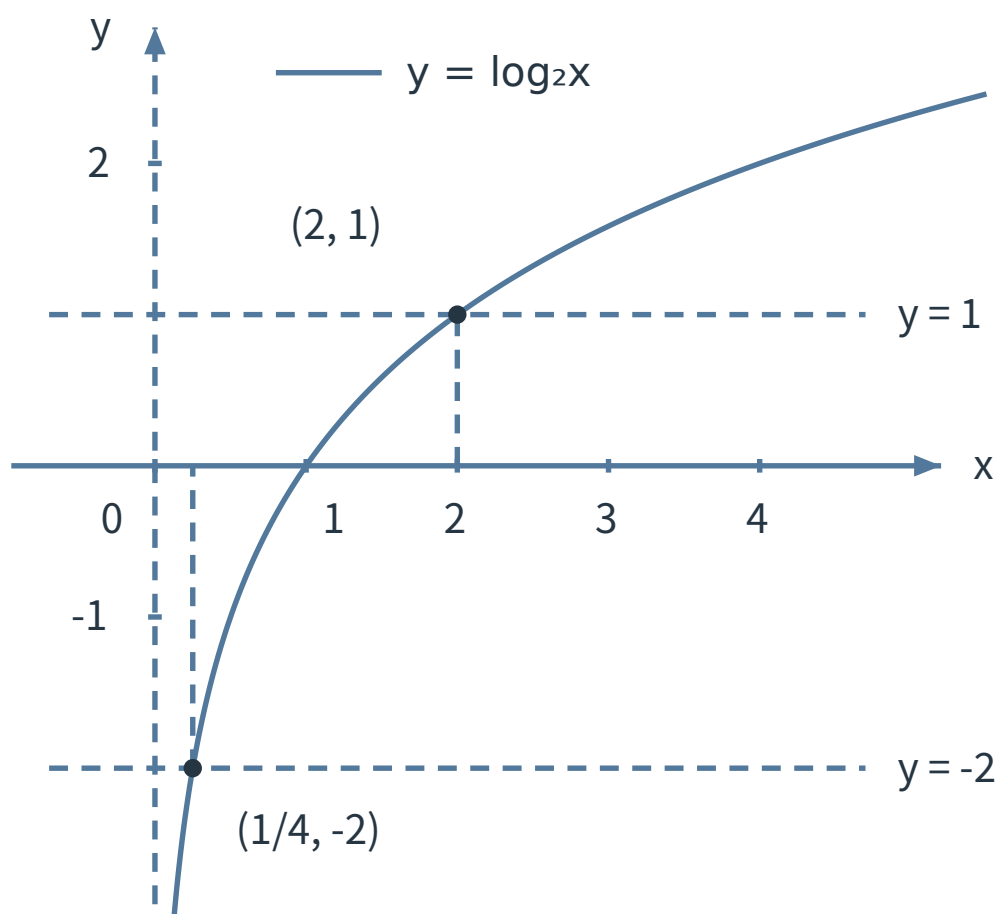


図 3 実線は $y = \log_2 x$ 。 $t = -2, 1$ に対応する破線 $y = -2$, $y = 1$ との交点は $(\frac{1}{4}, -2)$ 、 $(2, 1)$ 。したがって $x = \frac{1}{4}, 2$ 。 t は負でもよく、制限は $x > 0$ であって $t > 0$ ではない。 $x = 0$ は漸近線で、表示窓の端には点を付けない。

練習問題 1

方程式 $\log_3 (x - 2) = 2$ を解きなさい。

練習問題 2

方程式 $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) = -3$ を解きなさい。

練習問題 3

方程式 $\log_5 (2x - 1) = \log_5 (x + 7)$ を解きなさい。

練習問題 4

方程式 $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 4) = 3$ を解きなさい。

練習問題 5

方程式 $\log_3 (x + 2) - \log_3 (x - 1) = 1$ を解きなさい。

練習問題 6

方程式 $(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x - 4 = 0$ を解きなさい。

練習問題 7

方程式 $\log_2 (x - 5) = \log_2 (3 - x)$ を解きなさい。

練習問題 8

次の解法の誤りを指摘し、正しい解を求めなさい。

$$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) = 1$$

ある生徒は、 $\log_2 (x^2 - 1) = 1$ より、 $x^2 - 1 = 2$ なので、 $x = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ と答えた。

練習問題 1 の解答・解説

真数条件を確認する。

$x - 2 > 0$ より、 $x > 2$ である。

対数を指数の形へ戻す。

$$\log_3 (x - 2) = 2$$

$$x - 2 = 3^2$$

$$x - 2 = 9$$

$$x = 11$$

$x = 11$ は $x > 2$ を満たす。

元の式へ代入すると、 $\log_3 (11 - 2) = \log_3 9 = 2$ となり、成立する。

したがって、解は $x = 11$ である。

練習問題 2 の解答・解説

真数条件より、 $x + 1 > 0$

したがって、 $x > -1$ である。

指数の形へ戻す。

$$\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) = -3$$

$$x + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x + 1 = 8$$

$$x = 7$$

$x = 7$ は $x > -1$ を満たす。

元の式へ代入すると、 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ であり、成立する。

底が $0 < \frac{1}{2} < 1$ であっても、対数と指数の逆関係は利用できる。

したがって、解は $x = 7$ である。

練習問題 3 の解答・解説

真数条件を確認する。

$2x - 1 > 0$, $x + 7 > 0$ より、 $x > \frac{1}{2}$ である。

同じ底の対数が等しいので、真数を比較できる。

$2x - 1 = x + 7$ より、 $x = 8$ となる。

$x = 8$ は $x > \frac{1}{2}$ を満たす。

元の式へ代入すると、 $\log_5 15 = \log_5 15$ となり成立する。

したがって、解は $x = 8$ である。

練習問題 4 の解答・解説

それぞれの真数条件を確認する。

$x - 1 > 0$, $x - 4 > 0$ より、 $x > 4$ である。

真数条件を満たす範囲で対数の和をまとめる。

$$\log_2 ((x - 1)(x - 4)) = 3$$

指数の形へ戻す。

$$(x - 1)(x - 4) = 8$$

展開すると、次のように計算する。

$$x^2 - 5x + 4 = 8$$

$$x^2 - 5x - 4 = 0$$

解の公式より、次のように計算する。

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

ここで真数条件 $x > 4$ と照合する。

$$\frac{5 - \sqrt{41}}{2} < 0$$

この候補は真数条件を満たさない。
一方、次のように計算する。

$$\frac{5 + \sqrt{41}}{2} > 4$$

ここで、 $r = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$ と置く。
すると、次のように計算する。

$$r - 1 = \frac{3 + \sqrt{41}}{2} > 0$$

かつ、次のように計算する。

$$r - 4 = \frac{\sqrt{41} - 3}{2} > 0$$

両方の真数は正である。
さらに、次のように計算する。

$$(r - 1)(r - 4) = \frac{(3 + \sqrt{41})(\sqrt{41} - 3)}{4} = \frac{41 - 9}{4} = 8$$

したがって、元の式へ戻すと、 $\log_2(r - 1) + \log_2(r - 4) = \log_2 8 = 3$ となり、元の方程式を満たす。
したがって、解は $x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$ である。

練習問題 5 の解答・解説

真数条件を確認する。

$x + 2 > 0$, $x - 1 > 0$ より、 $x > 1$ である。

対数の商の性質を使う。

$$\log_3 \left(\frac{x+2}{x-1} \right) = 1$$

指数の形へ戻す。

$$\frac{x+2}{x-1} = 3$$

分母の条件 $x \neq 1$ はすでに $x > 1$ で満たしている。

両辺を変形すると、次のように計算する。

$$x + 2 = 3x - 3$$

$$5 = 2x$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$\frac{5}{2} > 1$ である。

元の式へ代入すると、次のように計算する。

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{\frac{5}{2}+2}{\frac{5}{2}-1} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = 3$$

元の方程式を満たす。

ここで、得られた解を元の式へ戻して確認する。 $x = \frac{5}{2}$ のとき、個々の真数は $x + 2 = \frac{9}{2}$, $x - 1 = \frac{3}{2}$ であり、どちらも正である。

したがって、 $\log_3 \frac{9}{2} - \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 3 = 1$ となり、元の方程式を満たす。

したがって、解は $x = \frac{5}{2}$ である。

練習問題 6 の解答・解説

真数条件より、 $x > 0$ である。

ここで、 $t = \log_2 x$ と置く。

$x > 0$ の範囲では、 t はすべての実数をとる。したがって、負の値も解の候補に含める。

置換すると、 $t^2 - 3t - 4 = 0$ となる。

因数分解して、 $(t - 4)(t + 1) = 0$ より、 $t = 4, -1$ である。

それぞれ x に戻す。

$t = 4$ のとき、 $\log_2 x = 4$ より、 $x = 16$ である。

$t = -1$ のとき、 $\log_2 x = -1$ より、 $x = \frac{1}{2}$ である。

どちらも $x > 0$ を満たす。

ここで、得られた解を元の式へ戻して確認する。

$x = 16$ のとき、 $\log_2 16 = 4$ であるから、 $4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0$ となる。

また、 $x = \frac{1}{2}$ のとき、 $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ であるから、 $(-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$ となる。

したがって、どちらの値も元の方程式を満たす。

したがって、解は $x = 16, \frac{1}{2}$ である。

練習問題 7 の解答・解説

真数条件を確認する。

$x - 5 > 0$, $3 - x > 0$ より、 $x > 5$, $x < 3$ となる。

しかし、この 2 つを同時に満たす x は存在しない。

したがって、元の方程式は定義できる範囲が存在しない。

解はない。

練習問題 8 の解答・解説

生徒の変形では、対数の和の性質を使う前に真数条件を確認していない点が誤りである。

もとの式では、 $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$ より、 $x > 1$ が必要である。

この条件のもとで対数の和をまとめると、 $\log_2 ((x - 1)(x + 1)) = 1$ となる。

積を計算すると、 $\log_2 (x^2 - 1) = 1$ である。

指数の形へ戻すと、 $x^2 - 1 = 2$ より、 $x^2 = 3$

したがって候補は、 $x = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ である。

しかし、元の真数条件は $x > 1$ である。

そのため、 $x = \sqrt{3}$ は採用できるが、 $x = -\sqrt{3}$ は条件を満たさず除外される。

誤りは、真数条件を確認せず候補をすべて解として扱ったことである。

元の式へ戻すと、 $\log_2 (\sqrt{3} - 1) + \log_2 (\sqrt{3} + 1)$ は、 $\log_2 2 = 1$ となり成立する。

したがって、正しい解は $x = \sqrt{3}$ である。