

第 109 講 加法定理

学習目標

この講では、角の和や差の三角関数を、既知の角の三角関数を使って表す方法を理解する。
教材終了後には、次のことができるようになる。

- $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ 、 $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ の 4 公式を、符号の暗記ではなく構造から説明できる。
- 角の和差を利用して、 75° や 15° のような角の三角関数の厳密値を求められる。
- 正接の和差公式を、正弦・余弦の公式から導き、適用条件を確認できる。

加法定理が必要になる理由

三角関数では、特別な角の値を利用して多くの角の値を求める。

例えば、 75° は特別な角ではないが、 $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ と分けることで、 45° と 30° の三角比を利用できる。

ここで注意すべきことは、角が足し算になっているからといって、三角関数の値も足し算になるわけではないことである。

実際に、 $\sin(45^\circ + 30^\circ)$ を考えると、もし $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ なら、 $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ + \sin 30^\circ$ となるはずである。

しかし、 $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ は約 1.207 であり、正弦の値は必ず -1 以上 1 以下なので、これは正しくない。

角の和差では、三角関数の値そのものではなく、単位円上の座標の合成を考える必要がある。

単位円から正弦・余弦の加法定理を考える

加法定理は、角の和を三角関数の値の和へ分解する公式ではない。単位円上の点の座標を、既知の長さや角度から分解して考える。

ここでは、図の条件として、 α 、 β をラジアンで表し、 $0 < \alpha$ 、 $0 < \beta$ 、 $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ を満たす鋭角の場合を考える。

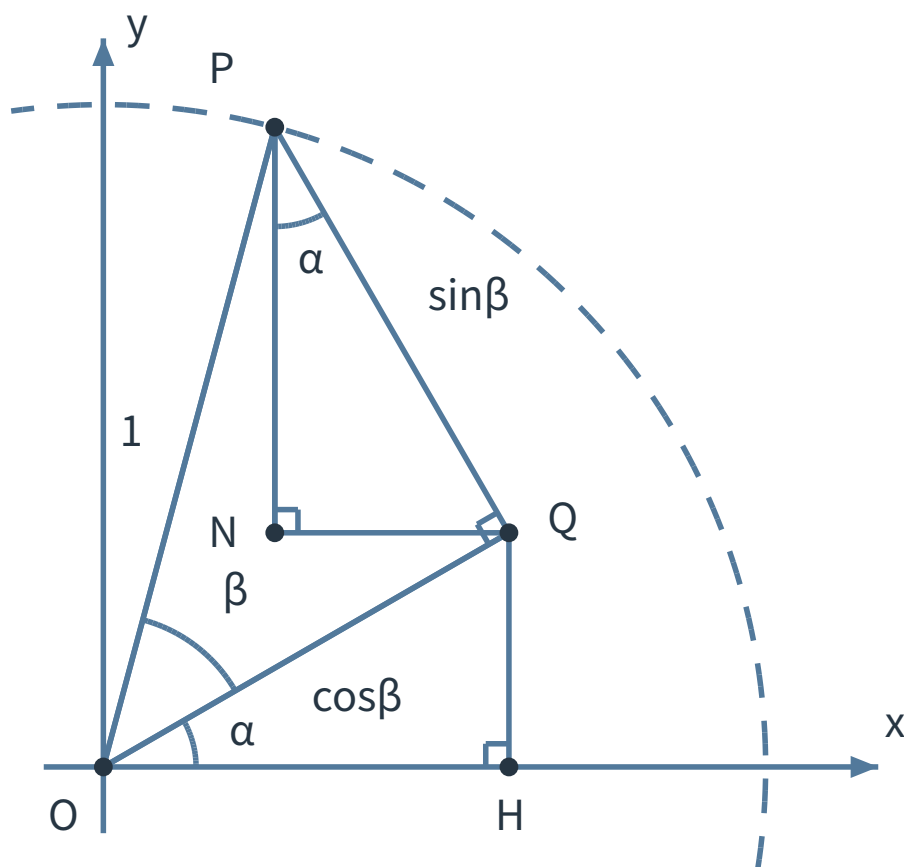


図 1 加法定理の座標分解 ($\alpha = 30^\circ$ 、 $\beta = 45^\circ$ の配置例)

原点を O とし、単位円上の点 P を、半径 OP が横軸となす角が $\alpha + \beta$ となるように取る。このとき、 $OP = 1$ である。

点 P から、角 α の半直線へ垂線を下ろし、その足を Q とする。また、 Q から x 軸へ垂線を下ろした足を H とする。

三角形 OQP は直角三角形であり、 $OP = 1$ である。 OQ は角 β に対する隣辺、 QP は対辺なので、 $OQ = \cos \beta$ 、 $QP = \sin \beta$ となる。

次に、三角形 OHQ を見る。 OQ は長さ $\cos \beta$ の線分であり、これを角 α だけ傾いた方向へ分解すると、 Q の座標は、 $Q = (\cos \beta \cos \alpha, \cos \beta \sin \alpha)$ となる。

ここで、 P と同じ横座標を持ち、 Q と同じ縦座標を持つ点を N とする。

QP は OQ に垂直であり、 PN は縦方向の線分である。そのため、 QN と PN からできる直角三角形 QPN では、 QP と OQ の関係から角 QPN が α となる。

よって、斜辺 $QP = \sin \beta$ を角 α で分解すると、次の 2 式が得られる。

$$QN = \sin \beta \sin \alpha$$

$$NP = \sin \beta \cos \alpha$$

P の横座標は、 Q の横座標から QN だけ減った長さであるため、 $x = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha$ となる。

また、 P の縦座標は、 Q の縦座標へ NP を加えた長さであるため、 $y = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha$ となる。

一方、単位円上で角 $\alpha + \beta$ の点 P の座標は、 $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ である。

したがって、座標を比較すると、 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 、 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ が得られる。

この図は鋭角の場合の関係を確認するためのものである。三角関数の加法定理自体は、一般の実数角に対して成立する定理であり、この図だけから一般角への成立を示したことにはならない。

加法定理の 4 公式

加法定理は次の 4 つである。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

差の公式は、新しい公式として暗記するのではなく、 β を $-\beta$ へ置き換えることで考える。

例えば、 $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$ である。

ここで、 $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ 、 $\cos(-\beta) = \cos \beta$ を使う。

正弦は奇関数、余弦は偶関数であるため、符号が決まる。

正接の和差公式

正接の和差公式は、正弦と余弦の加法定理を正接の定義へ代入して導く。

正接は、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ で定義される。

まず和の場合を考える。

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ へ加法定理を代入すると、次の式が得られる。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

分子・分母を $\cos \alpha \cos \beta$ で割ると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

したがって、 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ である。

この式を使うには、まず $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ が定義される必要があるため、 $\cos \alpha \neq 0$ 、 $\cos \beta \neq 0$ でなければならない。

さらに、合成角の正接が定義されるためには、 $1 - \tan \alpha \tan \beta \neq 0$ が必要である。

差の場合は、 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ と考える。

$\tan(-\beta) = -\tan \beta$ を使うと、 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ となる。

この場合も、 $\cos \alpha \neq 0$ 、 $\cos \beta \neq 0$ に加えて、 $1 + \tan \alpha \tan \beta \neq 0$ が必要である。

例えば、 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ では、 $1 - \tan \alpha \tan \beta = 1 - 1 = 0$ となる。

これは答えが0になるという意味ではない。

実際、 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ であり、 $\tan \frac{\pi}{2}$ は定義されないため、正接の和の公式を適用できない。

例題

例題 1: $\sin 75^\circ$ の値を求める

$\sin 75^\circ$ の値を求めよ。

ただし、 $75^\circ = \frac{5\pi}{12}$ であることを用いてよい。

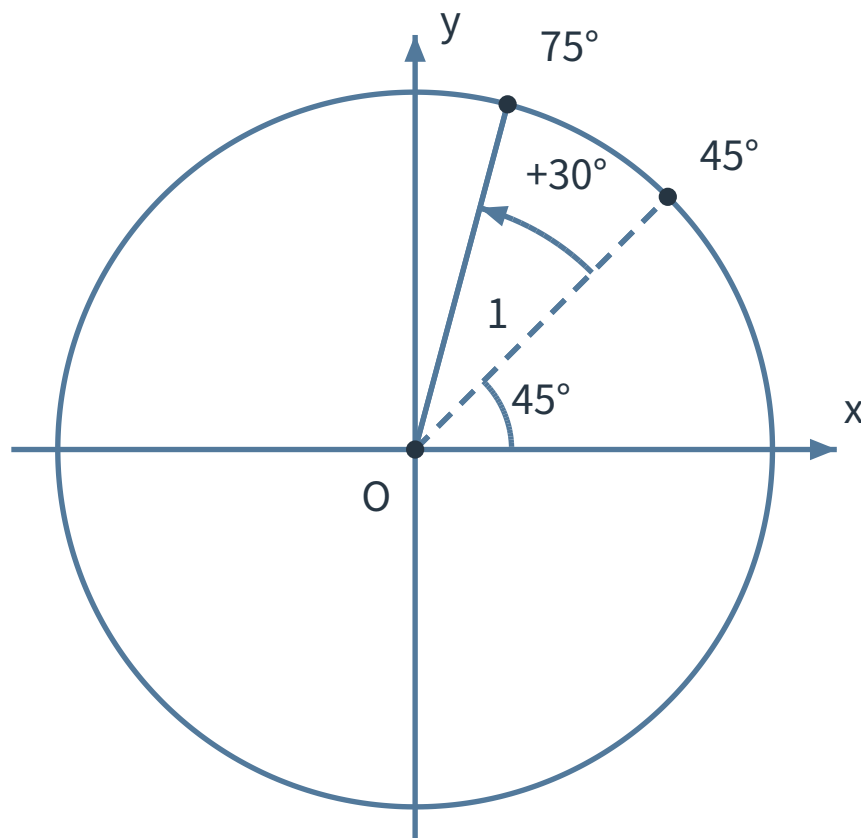


図 2 45° から正方向へ 30° 進むと 75° になる

例題 1 の解答・解説

75° を既知の角の和に分ける。 $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ 加法定理より、 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ である。

加法定理に値を代入して計算する。

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

よって、 $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ である。

なお、 $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ$ としないことが重要である。角の和を三角関数の値の和へ変えることはできない。

例題 2: $\cos 15^\circ$ の値を求める

$\cos 15^\circ$ の値を求めよ。

ただし、 $15^\circ = \frac{\pi}{12}$ である。

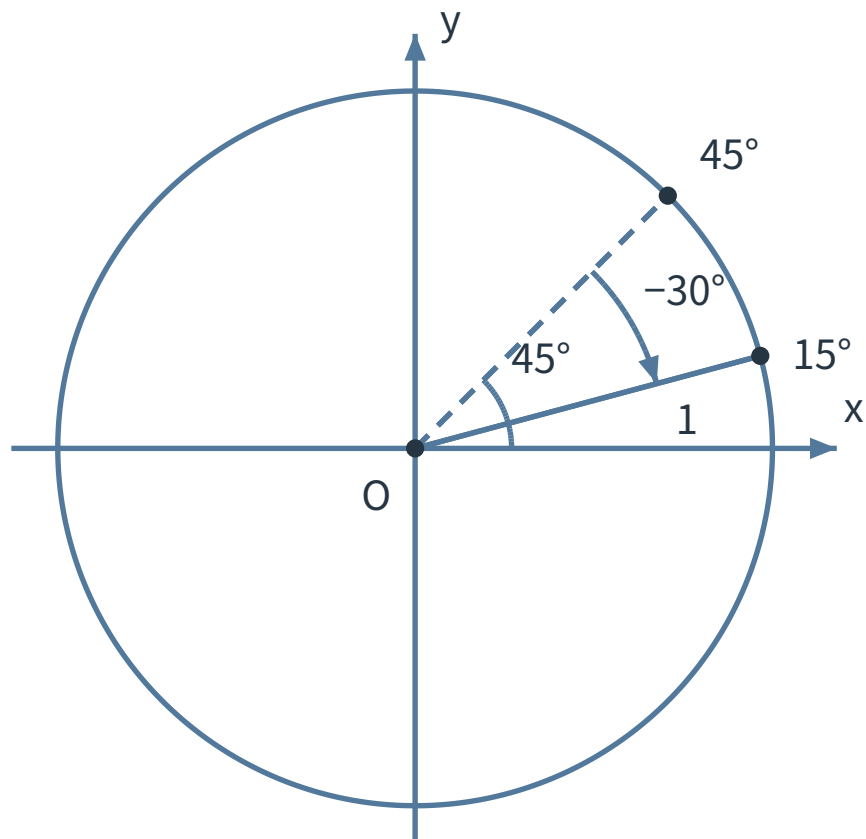


図 3 45°から時計回りへ30°戻ると15°になる

例題 2 の解答・解説

15° を差として表す。 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ 余弦の差の公式より、 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ である。

加法定理に値を代入して計算する。

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

よって、 $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ である。

例題 3： $\tan 105^\circ$ の値を求める

$\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

ただし、 $105^\circ = \frac{7\pi}{12}$ である。

例題 3 の解答・解説

105° を和に分ける。 $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ 正接の和の公式を使う。

このとき、 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\tan 45^\circ = 1$ はともに定義されている。

また、 $1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ = 1 - \sqrt{3} \neq 0$ なので、公式を適用できる。

$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

分母を有理化して式を整理する。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって、 $\tan 105^\circ = -2 - \sqrt{3}$ である。

また、 105° は第 2 象限の角であり、正接は負になる。求めた値も負なので符号が一致している。

演習問題

演習問題 1

$\sin 105^\circ$ の値を求めよ。

ただし、 $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ を利用してよい。

演習問題 2

$\cos 165^\circ$ の値を求めよ。
ただし、 $165^\circ = 120^\circ + 45^\circ$ と表してよい。

演習問題 3

$\tan 15^\circ$ の値を求めよ。
ただし、 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ を利用してよい。

演習問題 4

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 、 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ であり、 α は第 1 象限の角とする。
また、 β は第 2 象限の角で、 $\sin \beta = \frac{5}{13}$ 、 $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ を満たすとする。
このとき、 $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

演習問題 5

$\cos(\alpha - \beta)$ の公式について考える。
(1) $\cos(\alpha - \beta)$ を加法定理から導き、正しい符号を示せ。
(2) $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ と誤って考えると、どのような間違いが起こるか説明せよ。

演習問題 6

$\tan(\alpha - \beta)$ の公式を用いて、 $\tan 75^\circ$ を求めよ。
ただし、 $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ ではなく、 $75^\circ = 120^\circ - 45^\circ$ を利用すること。
また、公式を使うために確認すべき条件を示せ。

演習問題 7

次の角について、正接の和の公式が使えるか答えよ。 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 、 $\beta = \frac{\pi}{4}$ このとき、 $\tan(\alpha + \beta)$ を求めようとした場合、公式の分母が 0 になる理由を説明せよ。

演習問題 8

次の問いに答えよ。
(1) 150° をラジアンで表せ。
(2) $\frac{3\pi}{4}$ を度数法で表せ。
(3) $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ を利用して、 $\sin 150^\circ$ を加法定理で求めよ。

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

105° を既知の角の和に分ける。

$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ と分け、正弦の加法定理を使って計算する。

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

したがって、 $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ である。

演習問題 2 の解答・解説

165° を、 $165^\circ = 120^\circ + 45^\circ$ と表す。

余弦の加法定理より、 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ である。

加法定理に値を代入して計算する。

$$\begin{aligned}\cos 165^\circ &= \cos(120^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

よって、 $\cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ である。

第 2 象限の角なので余弦が負になることも確認できる。

演習問題 3 の解答・解説

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ である。

まず、 $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ はいずれも定義されている。

また、差の公式の分母は、 $1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ なので、公式を適用できる。

正接の差の公式より、 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ である。

加法定理に値を代入して計算する。

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\end{aligned}$$

分母を有理化して式を整理する。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって、 $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ である。

演習問題 4 の解答・解説

余弦の加法定理を使う。

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ に与えられた値を代入して計算する。

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13} \right) - \frac{3}{5} \frac{5}{13} \\ &= -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} \\ &= -\frac{63}{65}\end{aligned}$$

したがって、 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{63}{65}$ である。

象限条件によって $\cos \beta$ の符号が決まっているため、符号を曖昧にしてはいけない。

演習問題 5 の解答・解説

(1) 差は、 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ と考える。

余弦の加法定理と負の角の性質から次の式を得る。

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

(2) 誤って、 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ とすると、これは $\cos(\alpha + \beta)$ の公式に相当する。

例えば、 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ とすると、正しい差の公式では、 $\cos(60^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

一方、誤った式では、 $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ なので、 $\cos(60^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$ となる。

したがって、差の公式では正弦の符号変化を考える必要があり、和の公式をそのまま使ってはいけない。

演習問題 6 の解答・解説

$75^\circ = 120^\circ - 45^\circ$ より、 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ を使う。

ただし、 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$, $\tan 45^\circ = 1$ である。

加法定理に値を代入して計算する。

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \frac{-\sqrt{3} - 1}{1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}\end{aligned}$$

分母を有理化して式を整理する。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

よって、 $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ である。

公式を使うには、 $\tan 120^\circ$ と $\tan 45^\circ$ が定義され、さらに、 $1 + \tan 120^\circ \tan 45^\circ \neq 0$ であることを確認する必要がある。

実際、 $1 - \sqrt{3} \neq 0$ なので公式を適用できる。

演習問題 7 の解答・解説

正接の和の公式は、 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ である。

ここでは、 $\tan \alpha = \tan \beta = 1$ なので分母は、 $1 - 1 \cdot 1 = 0$ になる。

これは公式の答えが 0 になるという意味ではない。

実際、 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ であり、 $\tan \frac{\pi}{2}$ は定義されない。

したがって、この場合は公式の適用条件を満たさない。

演習問題 8 の解答・解説

(1) 度数法と弧度法の関係は、 $180^\circ = \pi$ である。

したがって、 $150^\circ = \frac{150}{180}\pi = \frac{5\pi}{6}$ である。

(2) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ$ である。

(3) $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ より、 $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ)$ と考える。

正弦の差の公式を使って計算する。

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - 30^\circ) &= \sin 180^\circ \cos 30^\circ - \cos 180^\circ \sin 30^\circ \\ &= 0 - (-1)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって、 $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ である。